XXVI. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny a református középiskolák számára, 2023 8. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.

Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

1. feladat: Andris és Bence Budapesten, az Üllői úton lakik, és ugyanezen a hosszú, egyenes úton, Bencéék házától 500 méterre található az iskola is, ahová mindketten járnak. Egyszer kipróbálták, hogy ha egyszerre indulnak el otthonról, akkor Andrisnak háromszor akkora sebességgel kell haladnia, mint Bencének, hogy egyszerre érkezzenek meg az iskolába.

a) Milyen messze lakhatnak egymástól a fiúk?

b) Mindkét gyerek legfeljebb 5,4 km/h nagyságú sebességgel tud gyalogolni. Ha reggel egyszerre indulva, gyalog szeretnének iskolába menni, akkor melyik az a legkésőbbi időpont, amikor el kell indulniuk, hogy mindketten pontosan 8 órára érjenek be? Az indulási időpontot perc pontossággal add meg!

(Feltételezheted, hogy a fiúk egyenletesen mozognak.)

Válasz:

a) Mivel azonos ideig mozognak, és Andris sebessége háromszor akkora, mint Bencéé, így Andris megtett útja is háromszorosa kell, hogy legyen a Bence által megtett 500 méternek, azaz

$$s_{Andris} = 3 \cdot s_{Bence} = 1500\ m$$

A leírásból nem derül ki, hogy az iskolaépület a két fiú lakása között van, vagy a kettejük otthonát összekötő szakaszon kívül esik, éppen ezért két válaszlehetőség adódik.

- Ha az iskola a két lakás között van, akkor a fiúk által az iskoláig megtett utak összege kiadja a lakhelyük x távolságát Ezért

$$x = s_{Bence} + s_{Andris} = s_{Bence} + 3 \cdot s_{Bence} = 4 \cdot 500\ m = 2000\ m\ (= 2\ km)$$

- Ha az iskola a két lakást összekötő szakaszon kívül esik, akkor Andrisnak meg kell tennie a lakásaik között lévő x távolságot, és még a Bence lakásától mért 500 métert is. Azaz

$$s_{Andris} = x + s_{Bence}$$

$$x = s_{Andris} - s_{Bence} = 3 \cdot s_{Bence} - s_{Bence} = 2 \cdot 500\ m = 1000\ m\ (= 1\ km)$$

Tehát vagy 2000 méterre, vagy 1000 méterre laknak egymástól a fiúk.

5+5 pont

b) Mivel Bence közelebb lakik, elegendő azt megvizsgálni, hogy Andris mennyi idő alatt tudja megtenni maximális sebességével az iskoláig tartó távolságot.

$$v_{max} = 5{,}4\ \frac{km}{h} = 1{,}5\ \frac{m}{s}$$

Andris gyaloglásához szükséges időtartam:

$$\Delta t_{gyaloglás,Andris} = \frac{s_{Andris}}{v_{max}} = \frac{3 \cdot s_{Bence}}{v_{max}} = \frac{1500\ m}{1{,}5\ \frac{m}{s}} = 1000\ s = \frac{5}{18}\ h = 16\ min\ 40\ s$$

Ezek szerint Andrisnak 16 perc 40 másodperccel 8 óra előtt el kell indulnia, hogy pontosan beérjen az iskolába.

Tehát a két fiúnak legkésőbb

$8\ óra - 16$ perc 40 másodperc $=$ 7 óra 43 perc 20 másodperc $\approx$ 7 óra 43 perckor

el kell indulnia az iskolába.

(A gyaloglás időtartamánál nem szabad perc pontossággal beérni, hiszen 16 perc alatt nem érhet be az iskolába, azaz 7 óra 44 perckor indulva már elkésne Andris az iskolából! Ilyen megoldás esetében pontlevonást kell alkalmazni!

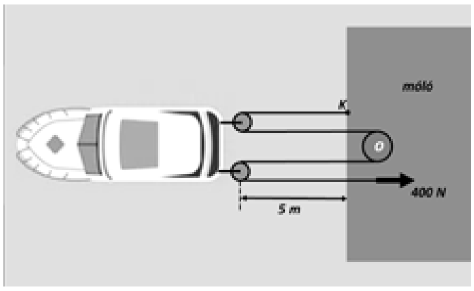
Nem volt kérdés, de kiszámítható, hogy Bencének nagyon kényelmesen kell sétálni, hiszen

$$\frac{v_{max}}{3} = 1{,}8\ \frac{km}{h} = 0{,}5\ \frac{m}{s}$$

nagyságú sebességgel időben beérkezik az iskolába!)

10 pont

2. feladat: A mólótól 5 m távolságban álló, javításra váró hajót segítség hiányában a hajóács egyedül igyekszik bevontatni. Amikor a *K* pontban a móló széléhez kötött, a hajótesthez rögzített csigákon, valamint a mólón álló hengeres *O* oszlop körül átvezetett könnyű, nyújthatatlan kötél végét állandó 400 N nagyságú erővel húzza, a hajó lassan, egyenletesen úszva közeledik a part felé.



a) Mekkora munkát kell végeznie az ácsnak, míg a hajót a mólóig vontatja?
b) Mennyi ideig tart a hajó bevontatása, ha az ács 0,5 m/s nagyságú sebességgel mozgatja a kötél szabad végét?
c) Mekkora erővel fékezi a hajó mozgását a víz?
d) Ha csak a hajó (pontosabban: a hozzá rögzített csigák) és a hajóács által a kötélre kifejtett erőket tekintjük, mekkora lenne ezek eredőjének nagysága? Hogyan lehetséges, hogy a kötél szabad vége mégis egyenletesen mozog?
A kötélszárak párhuzamosak, és ugyanabba a vízszintes síkba esnek. A kötélsúrlódás és a csigák tengelysúrlódása, valamint a csigák tömege elhanyagolható. (A mellékelt felülnézeti ábra nem méretarányos!)

Válasz:

a) A kötél nyújthatatlan, hossza állandó, ezért a négy, egyenként *l*=5 m hosszúságú kötélszakasz hosszának megfelelő távolságon kell a hajóácsnak húzni a kötél végét ahhoz, hogy a hajó a mólóhoz érkezzen. Vagyis az ács munkája:

$$W_{bevontatás} = F \cdot 4 \cdot l = 400\,N \cdot 4 \cdot 5\,m = 8000\,J$$

5 pont

b) A kötélhossz állandóságából következik, hogy a kötél szabad végének *s* úton történő elmozdulása alatt a hajó *s/4* nagyságú távolságot tesz meg, azaz a hajó sebessége negyedrésze a kötél szabad vége mozgatási sebességének:

$$v_{hajó} = \frac{v_{kötélvég}}{4} = 0{,}125\,\frac{m}{s}$$

Ezzel a sebességgel a hajó a móló széléig tartó távolságot

$$t_{bevontatás} = \frac{l}{v_{hajó}} = \frac{5\,m}{0{,}125\,\frac{m}{s}} = 40\,s$$

alatt teszi meg. (Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha azt számoljuk ki, hogy menynyi idő alatt tud a hajóács 20 m hosszúságú kötelet 0,5 m/s sebességgel „kihúzni”.)

5 pont

c) Mivel a hajó egyenletesen mozog, a hozzá rögzített állócsigákra ható erők eredőjének nagysága meg kell, hogy egyezzen a víz által a hajóra kifejtett fékezőerővel.
Mindkét állócsiga, és az ugyancsak állócsigának tekinthető oszlop az erőnek csak az irányát változtatja meg, azaz egy-egy csiga két oldalán fellépő kötélerők mindegyikének nagysága a kötél szabad végén kifejtett 400 N–nal egyezik meg. Így a kötél által a hajóra (az állócsigákra) kifejtett eredő erő nagysága

$$F_{kötél \to hajó} = 4 \cdot 400\,N = 1600\,N$$

Ebből következően a víz által a hajóra kifejtett fékezőerő nagysága

$$|F_{fékező}| = F_{kötél \to hajó} = 1600\ N$$

iránya természetesen a kötélerőkkel, illetve a hajó mozgásirányával ellentétes.
(Értelemszerűen az a gondolatmenet is helyes eredményre vezet, amelyet arra alapozunk, hogy egyszerű gépekkel a kifejtendő erő nagyságát csökkenthetjük, illetve kifejtésének irányát kényelmesebbé tehetjük ugyan, de munkát nem lehet „megtakarítani". A bevontatás során végzett munka – nagyságra nézve – a víz fékezőerejének munkájával kell, hogy megegyezzen, hiszen a hajó mozgása egyenletes, mozgási energiája nem változik.
Ezért

$$|W_{víz}| = W_{bevontatás} = 8000\ J$$

Mivel a hajó elmozdulása 5 méter, a fékezőerő ebből már kiszámítható:

$$|W_{víz}| = |F_{fékező}| \cdot l = 8000\ J \ \ \rightarrow \ |F_{fékező}| = \frac{|W_{víz}|}{l} = 1600\ N$$

ugyanúgy, mint a másik megoldásban.)

5 pont

d) Az előbbi pontban kiszámítottuk a kötél által a hajóra kifejtett erő nagyságát, ami Newton III. törvénye értelmében megadja a hajó által a kötélre kifejtett erő nagyságát is:

$$|F_{hajó \to kötél}| = F_{kötél \to hajó} = 1600\ N$$

Ez az erő szemben mutat a hajóács által a kötélre kifejtett erővel, így a két erő eredőjének nagysága

$$F_{eredő}(ács, hajó) = |F_{hajó \to kötél}| - F = 1600\ N - 400\ N = 1200\ N$$

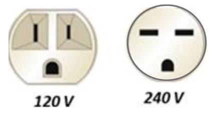
és a hajó felé irányul.
Ha ez lenne a kötélre ható eredő erő, akkor a kötélnek gyorsulnia kellene (Newton II. törvénye). Azonban a most vizsgált két erőn kívül a kötélre még hat a hengeres oszlop és a *K* pontban a móló. Már említettük, hogy valamennyi kötélerő 400 N nagyságú, így – ismételten a hatás-ellenhatás törvényére hivatkozva – beláthatjuk, hogy az oszlop 800 N nagyságú, a móló pedig 400 N nagyságú erőt gyakorol a kötélre, ezért a kötélre ható összes erők eredője

$$\sum F = F_{eredő}(ács, hajó) - F_{oszlop} - F_{móló} = 1200\ N - 800\ N - 400\ N = 0\ N$$

azaz a kötél szabad vége (ill. tömegközéppontja) egyenletes mozgást végezhet.

5 pont

3. feladat: A 230 V-os hálózati feszültségre két, egyenként 0,5 ohm ellenállású vezetékkel csatlakoztatunk egy 230 V feszültségre méretezett, 100 W névleges teljesítményű izzólámpát.
a) A hálózati feszültség hány százaléka esik a vezetékekre? Névleges teljesítményének hány százalékát szolgáltatja az izzólámpa? Mi lenne a válasz a kérdésekre, ha az izzólámpát egy olyan hősugárzóra cserélnénk, ami 230 V, 1000 W névleges adatokkal jellemezhető? (Az ellenállások hőmérsékletfüggésétől eltekinthetünk.)
b) Az Egyesült Államokban a háztartások nagy részében kétféle feszültség közül lehet választani, kétféle aljzatba (*konnektorba*) lehet csatlakoztatni az elektromos berendezéseket. A fogyasztók többségét 120 V-ról működtetik, a 2000 W-nál nagyobb teljesítményűek (pl. szárítógép, elektromos fűtőtest, kemence) névleges feszültsége viszont 240 V. Miért előnyösebb a nagyobb teljesítményű fogyasztókat magasabb feszültségről táplálni?



Válasz:

a) Az izzólámpa ellenállása (melyet állandónak tekintünk, ezért a névleges adataiból számolhatjuk):

$$R_i = \frac{U_h^2}{P_{i,n}} = \frac{(230\,V)^2}{100\,W} = 529\,\Omega$$

Az áramkörben a sorosan kapcsolt ellenállások miatt

$$I_1 = \frac{U_h}{R_{vez.} + R_i} = \frac{230\,V}{2 \cdot 0{,}5\,\Omega + 529\,\Omega} = \frac{23}{53}\,A \approx 0{,}434\,A$$

erősségű áram folyik, ezért a vezetékekre eső feszültség

$$U_{vez.,1} = I_1 \cdot R_{vez.} = \frac{23}{53}\,A \cdot 2 \cdot 0{,}5\,\Omega = \frac{23}{53}\,V \approx 0{,}434\,V$$

(Egy-egy vezetékszakaszra természetesen ennek fele, 0,217 V, de a *vezetékekre* eső feszültség a kérdés, nem *egy-egy vezetékre*! Teljesértékű megoldás, ha a versenyző kihasználja, hogy a soros kapcsolás miatt a hálózati feszültség az ellenállások arányában oszlik meg.)
Mivel

$$\frac{U_{vez.}}{U_h} \cdot 100\,\% = \frac{R_{vez.}}{R_{vez.} + R_i} \cdot 100\,\% \approx 0{,}189\,\%$$

mondhatjuk, hogy a hálózati feszültség 0,189 %-a, illetve körülbelül 0,2 %-a esik a vezetékekre.
Az izzólámpa teljesítménye

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = I_1^2 \cdot R_i \approx 99{,}623\,W$$

tehát

$$\frac{P_1}{P_{i,n}} \cdot 100\,\% \approx 99{,}6\,\%$$

azaz a névleges teljesítményének 99,6 %-át adja le.
A hősugárzó esetében ugyanezeket a számításokat kell elvégeznünk:

$$R_{hő} = \frac{U_h^2}{P_{hő,n}} = \frac{(230\,V)^2}{1000\,W} = 52{,}9\,\Omega$$

$$I_2 = \frac{U_h}{R_{vez.} + R_{hő}} = \frac{230\,V}{2 \cdot 0{,}5\,\Omega + 52{,}9\,\Omega} = \frac{2300}{539}\,A \approx 4{,}267\,A$$

$$U_{vez.2} = I_2 \cdot R_{vez.} = \frac{2300}{539}\,A \cdot 2 \cdot 0{,}5\,\Omega = \frac{2300}{539}\,V \approx 4{,}267\,V$$

$$\frac{U_{vez.2}}{U_h} \cdot 100\,\% = \frac{R_{vez.}}{R_{vez.} + R_{hő}} \cdot 100\,\% \approx 1{,}86\,\%$$

Tehát a vezetékekre ebben az esetben a hálózati feszültség 1,86 %-a, azaz körülbelül 2 %-a esik.
A hősugárzó teljesítménye

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 = I_2^2 \cdot R_{hő} \approx 963{,}24\, W$$

tehát

$$\frac{P_2}{P_{hő,n}} \cdot 100\,\% \approx 96{,}3\,\%$$

azaz a névleges teljesítményének 96,3 %-át adja le.

14 pont

b) Ugyanolyan névleges feszültségre méretezett, eltérő teljesítményű fogyasztók rendeltetésszerű működése esetén a nagyobb teljesítményű fogyasztók nagyobb áramerősséget igényelnek, mint a kisebb teljesítményűek.

$$P_{névleges} = U \cdot I$$

Ugyanolyan bekötő vezetékeket használva a nagyobb áramerősség esetén a vezetékekre eső feszültség is nagyobb lesz, a rajtuk felszabaduló teljesítmény – azaz a veszteség – megnő, mégpedig az áramerősség négyzetével arányosan.

$$P_{vezeték} = U_{vezeték} \cdot I_{vezeték} = I_{vezeték}^2 \cdot R_{vezeték}$$

A vezetékeken időegység alatt termelődő hőveszteséget csökkenteni vagy a vezetékek ellenállásának, vagy az áramerősségnek a csökkentésével lehet. Adott hosszúságú vezetékek ellenállásának csökkentése a vezeték keresztmetszetének növelésével, vagy nagyon kicsi fajlagos ellenállású anyagok felhasználásával lehetséges. Ennek technológiai és gazdaságossági megfontolások határt szabnak: karvastagságú, aranyból készült vezetékeket nem könnyű, és nem is olcsó megoldás a lakás hálózatának kialakításánál a falba süllyeszteni… Jelentősebben befolyásolja a veszteséget az áramerősség, ezért célszerű azt csökkenteni, ami adott teljesítmény mellett csak a feszültség növelésével oldható meg.
Amennyiben a nagy teljesítményű fogyasztók is 120 V-ra készülnének, névleges teljesítményüknek megfelelően működve nagy áramerősséget igényelnének. Emiatt azok a vezetékek, amelyek keresztmetszete (és anyaga) úgy van megválasztva, hogy a kisebb teljesítményű, ugyancsak 120 V-ra méretezett fogyasztókon áthaladó áramerősség rajtuk csak elhanyagolható hőveszteséget okozzon, jelentősen felmelegednének. Ugyanazok a vezetékek (pl. megfelelő keresztmetszetű rézvezetékek), amelyeket az alacsonyabb feszültségről működő kisebb teljesítményű fogyasztók által felvett áramerősséghez illeszkedően választottak meg, alkalmasak a nagyobb teljesítményű fogyasztók táplálására is, ha azokat nagyobb feszültségre méretezik, és ennek megfelelő konnektorhoz csatlakoztatják.

6 pont

4. feladat: Egy piros és egy kék színű, egyformán 54 dkg tömegű és 1,5 liter űrtartalmú alumínium lábost színültig töltöttünk vízzel, majd a piros lábos vizébe egy 7850 kg/m^3 sűrűségű vasból, a kék színűbe pedig egy 600 kg/m^3 sűrűségű fából készült kockát tettünk. Mindkét kocka tömege 150 gramm volt.
a) Miután a lábosok külső felületét szárazra töröltük, mindkettőt mérlegre tettük. Mekkora volt a piros, illetve a kék edény mért tömege?
b) Mekkora a kockák vízbe helyezését követően a piros, illetve a kék lábos átlagsűrűsége? Az eredményeket kg/m^3-ben, egész számra kerekítve add meg!
(Az alumínium sűrűsége 2700 kg/m^3, a vízé pedig 1000 kg/m^3. A fa kocka nem ér hozzá a kék edény falához.)

Válasz:

a) Egy-egy lábosba betöltött víz tömege, amikor az edények színültig vannak:

$$m_{víz,teli} = \rho_{víz} \cdot V_{belső} = 1000\ \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}0015\ m^3 = 1{,}5\ kg$$

A piros edénybe tett vaskocka elsüllyed, ezért térfogatával megegyező térfogatú vizet szorít ki az edényből.

$$V_{kiszorított,vas} = V_{vaskocka} = \frac{m_{kocka}}{\rho_{Fe}} = \frac{0{,}15\ kg}{7850\ \frac{kg}{m^3}} = 0{,}0000191\ m^3 = 0{,}0191\ dm^3$$

A fa kocka viszont úszik, mivel sűrűsége kisebb, mint a vízé. Arkhimédész törvénye értelmében olyan térfogatú vizet szorít ki, amelynek tömege megegyezik a fa kocka tömegével.

$$m_{kocka} \cdot g = \rho_{víz} \cdot V_{bemerülő} \cdot g$$

$$V_{kiszorított,fa} = V_{bemerülő} = \frac{m_{kocka}}{\rho_{víz}} = \frac{0{,}15\ kg}{1000\ \frac{kg}{m^3}} = 0{,}00015\ m^3 = 0{,}15\ dm^3$$

(Itt még nem szükséges a bemerülő térfogat kiszámítása, hiszen a mért tömeg szempontjából nincs szükség az ismeretére, de lehetséges, hogy a megoldók ezt az utat követik.)
Mivel az edények kezdetben színültig voltak, a kockák által kiszorított víz kifolyik. Így az egyes edényekben bennmaradó víz tömege:

$$m_{víz,piros} = m_{víz,teli} - \rho_{víz} \cdot V_{kiszorított,vas} = 1{,}5\ kg - 1000\ \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}0000191\ m^3$$

$$m_{víz,piros} = 1{,}5\ kg - 0{,}0191\ kg = 1{,}4809\ kg$$

illetve

$$m_{víz,kék} = m_{víz,teli} - \rho_{víz} \cdot V_{kiszorított,fa} = 1{,}5\ kg - 1000\ \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}00015\ m^3$$

$$m_{víz,kék} = 1{,}5\ kg - 0{,}15\ kg = 1{,}35\ kg$$

(Természetesen ez utóbbi eredmény a fentiekben említett indoklással, számítások nélkül adódik, ahogy ebben az esetben a mérleg által mért tömeget is – az alábbiakban feltüntetett számítás nélkül – azonnal fel lehet írni.)
A mérleg az üres edény, a benne maradt víz, és a kocka tömegének összegét mutatja (mivel minden összetevő egyensúlyban van).
Emiatt a mért tömegértékek:

$$M_{mért,piros} = m_{lábos} + m_{víz,piros} + m_{kocka} = 0{,}54\ kg + 1{,}4809\ kg + 0{,}15\ kg$$

$$M_{mért,piros} = 2{,}1709\ kg$$

illetve

$$M_{mért,kék} = m_{lábos} + m_{víz,kék} + m_{kocka} = 0{,}54\ kg + 1{,}35\ kg + 0{,}15\ kg$$

$$M_{mért,kék} = 2{,}04\ kg$$

10 pont

b) Az üres lábos térfogata (az edény falainak térfogata):

$$V_{lábos} = \frac{m_{lábos}}{\rho_{Al}} = \frac{0{,}54\ kg}{2700\ \frac{kg}{m^3}} = 0{,}0002\ m^3 = 0{,}2\ dm^3$$

A piros lábosba betett vas kocka elsüllyedt, az edényből a kiszorított víz kifolyt, a rendszer (lábos + víz + kocka) térfogata a lábos falainak és a színültig kitöltött űrtartalmának térfogatából tevődik össze:

$$V_{piros} = V_{lábos} + V_{belső} = 0{,}2\ dm^3 + 1{,}5\ dm^3 = 1{,}7\ dm^3 = 0{,}0017\ m^3$$

Így a piros lábos átlagsűrűsége

$$\rho_{átlag,piros} = \frac{M_{mért,piros}}{V_{piros}} = \frac{2{,}1709\ kg}{0{,}0017\ m^3} = 1277\ \frac{kg}{m^3}$$

A kék lábosban a fa kocka úszik, ami azt jelenti, hogy térfogatának egy része a víz felett van. A vízből kiálló rész térfogata az úszás feltételének felírásából adódik:

$$m_{kocka} \cdot g = \rho_{víz} \cdot V_{bemerülő} \cdot g$$

$$V_{bemerülő} = \frac{m_{kocka}}{\rho_{víz}} = 0{,}00015\ m^3 = 0{,}15\ dm^3$$

A fa kocka teljes térfogata:

$$V_{fakocka} = \frac{m_{kocka}}{\rho_{fa}} = \frac{0{,}15\ kg}{600\ \frac{kg}{m^3}} = 0{,}00025\ m^3 = 0{,}25\ dm^3$$

így a vízfelszín fölött lévő rész térfogata

$$V_{kiálló} = V_{fakocka} - V_{bemerülő} = 0{,}00025\ m^3 - 0{,}00015\ m^3 = 0{,}0001\ m^3 = 0{,}1\ dm^3$$

A piros lábos rendszerének térfogata a lábos falainak, a színültig kitöltött űrtartalmának, és a fa kocka kiálló részének térfogatából tevődik össze:

$$V_{kék} = V_{lábos} + V_{belső} + V_{kiálló} = 0{,}2\ dm^3 + 1{,}5\ dm^3 + 0{,}1\ dm^3 = 1{,}8\ dm^3 = 0{,}0018\ m^3$$

Így a kék lábos átlagsűrűsége

$$\rho_{átlag,kék} = \frac{M_{mért,kék}}{V_{kék}} = \frac{2{,}04\ kg}{0{,}0018\ m^3} = 1133{,}33\ \frac{kg}{m^3} \approx 1133\ \frac{kg}{m^3}$$

10 pont

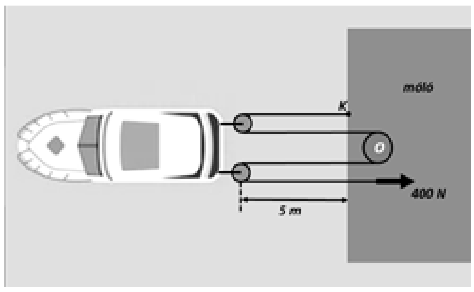
XXVI. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2023
9. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.

Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

1. feladat: A mólótól 5 m távolságban álló, javításra váró hajót segítség hiányában a hajóács egyedül igyekszik bevontatni. Amikor a K pontban a móló széléhez kötött, a hajótesthez rögzített csigákon, valamint a mólón álló hengeres O oszlop körül átvezetett könnyű, nyújthatatlan kötél végét állandó 400 N nagyságú erővel húzza, a hajó lassan, egyenletesen úszva közeledik a part felé.



a) Mekkora munkát kell végeznie az ácsnak, míg a hajót a mólóig vontatja?

b) Mennyi ideig tart a hajó bevontatása, ha az ács 0,5 m/s nagyságú sebességgel mozgatja a kötél szabad végét?

c) Mekkora erővel fékezi a hajó mozgását a víz?

d) Ha csak a hajó (pontosabban: a hozzá rögzített csigák) és a hajóács által a kötélre kifejtett erőket tekintjük, mekkora lenne ezek eredőjének nagysága? Hogyan lehetséges, hogy a kötél szabad vége mégis egyenletesen mozog?

A kötélszárak párhuzamosak, és ugyanabba a vízszintes síkba esnek. A kötélsúrlódás és a csigák tengelysúrlódása, valamint a csigák tömege elhanyagolható. (A mellékelt felülnézeti ábra nem méretarányos!)

Válasz:

a) A kötél nyújthatatlan, hossza állandó, ezért a négy, egyenként l=5 m hosszúságú kötélszakasz hosszának megfelelő távolságon kell a hajóácsnak húzni a kötél végét ahhoz, hogy a hajó a mólóhoz érkezzen. Vagyis az ács munkája:

$$W_{bevontatás} = F \cdot 4 \cdot l = 400\ N \cdot 4 \cdot 5\ m = 8000\ J$$

5 pont

b) A kötélhossz állandóságából következik, hogy a kötél szabad végének *s* úton történő elmozdulása alatt a hajó *s/4* nagyságú távolságot tesz meg, azaz a hajó sebessége negyedrésze a kötél szabad vége mozgatási sebességének:

$$v_{hajó} = \frac{v_{kötélvég}}{4} = 0{,}125\ \frac{m}{s}$$

Ezzel a sebességgel a hajó a móló széléig tartó távolságot

$$t_{bevontatás} = \frac{l}{v_{hajó}} = \frac{5\ m}{0{,}125\ \frac{m}{s}} = 40\ s$$

alatt teszi meg. (Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha azt számoljuk ki, hogy menynyi idő alatt tud a hajóács 20 m hosszúságú kötelet 0,5 m/s sebességgel „kihúzni”.)

5 pont

c) Mivel a hajó egyenletesen mozog, a hozzá rögzített állócsigákra ható erők eredőjének nagysága meg kell, hogy egyezzen a víz által a hajóra kifejtett fékezőerővel.
Mindkét állócsiga, és az ugyancsak állócsigának tekinthető oszlop az erőnek csak az irányát változtatja meg, azaz egy-egy csiga két oldalán fellépő kötélerők mindegyikének nagysága a kötél szabad végén kifejtett 400 N–nal egyezik meg. Így a kötél által a hajóra (az állócsigákra) kifejtett eredő erő nagysága

$$F_{kötél \to hajó} = 4 \cdot 400\ N = 1600\ N$$

Ebből következően a víz által a hajóra kifejtett fékezőerő nagysága

$$\left|F_{fékező}\right| = F_{kötél \to hajó} = 1600\ N$$

iránya természetesen a kötélerőkkel, illetve a hajó mozgásirányával ellentétes.
(Értelemszerűen az a gondolatmenet is helyes eredményre vezet, amelyet arra alapozunk, hogy egyszerű gépekkel a kifejtendő erő nagyságát csökkenthetjük, illetve kifejtésének irányát kényelmesebbé tehetjük ugyan, de munkát nem lehet „megtakarítani”. A bevontatás során végzett munka – nagyságra nézve – a víz fékezőerejének munkájával kell, hogy megegyezzen, hiszen a hajó mozgása egyenletes, mozgási energiája nem változik.
Ezért

$$|W_{víz}| = W_{bevontatás} = 8000\ J$$

Mivel a hajó elmozdulása 5 méter, a fékezőerő ebből már kiszámítható:

$$|W_{víz}| = \left|F_{fékező}\right| \cdot l = 8000\ J \ \rightarrow\ \left|F_{fékező}\right| = \frac{|W_{víz}|}{l} = 1600\ N$$

ugyanúgy, mint a másik megoldásban.)

5 pont

d) Az előbbi pontban kiszámítottuk a kötél által a hajóra kifejtett erő nagyságát, ami Newton III. törvénye értelmében megadja a hajó által a kötélre kifejtett erő nagyságát is:

$$\left|F_{hajó \to kötél}\right| = F_{kötél \to hajó} = 1600\ N$$

Ez az erő szemben mutat a hajóács által a kötélre kifejtett erővel, így a két erő eredőjének nagysága

$$F_{eredő}(ács, hajó) = \left|F_{hajó \to kötél}\right| - F = 1600\ N - 400\ N = 1200\ N$$

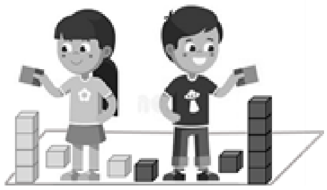
és a hajó felé irányul.
Ha ez lenne a kötélre ható eredő erő, akkor a kötélnek gyorsulnia kellene (Newton II. törvénye). Azonban a most vizsgált két erőn kívül a kötélre még hat a hengeres oszlop és a *K* pontban a móló. Már említettük, hogy valamennyi kötélerő 400 N nagyságú, így – ismételten a hatás-

ellenhatás törvényére hivatkozva – beláthatjuk, hogy az oszlop 800 N nagyságú, a móló pedig 400 N nagyságú erőt gyakorol a kötélre, ezért a kötélre ható összes erők eredője

$$\sum F = F_{eredő}(ács, hajó) - F_{oszlop} - F_{móló} = 1200\ N - 800\ N - 400\ N = 0\ N$$

azaz a kötél szabad vége (ill. tömegközéppontja) egyenletes mozgást végezhet.

5 pont



2. feladat: Lotti és Peti az ajándékba kapott építőkészletükben 40 darab 2 cm élhosszúságú játékkockát találtak, melyek egy része 2700 $\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű alumíniumból, másik része sárgarézből készült. A gyerekek elhatározták, hogy a szoba padlóján szétszórt kockákat egymásra rakva egy-egy tornyot építenek. Lottinak jutottak az alumíniumkockák: ő 1296 mJ munkát végzett, míg elkészült építményével. Peti a sárgaréz kockákból emelt tornyot, és 1344 mJ munkát kellett befektetnie, míg az utolsó darab is a helyére került.
a) Milyen magas lett a Peti által épített torony?
b) A sárgaréz építőkockák 8920 $\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű réz és 7140 $\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű cink ötvözetéből készültek. Az ötvözet tömegének hány százaléka réz?
Az ötvözés során bekövetkező térfogatváltozás elhanyagolható, a nehézségi gyorsulás értékét vedd 10 $\mathrm{m/s^2}$-nek!

Válasz:

a) Nyilvánvalóan

$$N = N_{Al} + N_{sr} = 40$$

ahol N_{Al} az alumíniumból, N_{sr} a sárgarézből készült építőkockák száma.
A torony felépítéséhez (minimálisan) szükséges munka meghatározásához tegyük fel, hogy előbb a padlón egymás mellé csúsztatták kockáikat a gyerekek, majd a rendezett kockasort (nagyon lassan) függőleges helyzetbe állították. Ekkor az

$$M_i = N_i \cdot m_i$$

tömegű kockasor – ahol m_i egy kocka tömege – tömegközéppontja a padlótól mért $a/2$ magasságból $N_i \cdot a/2$ magasságba került. A végzett munka a magassági (helyzeti) energia megnöveléséhez szükséges,

$$W_i = M_i \cdot g \cdot \Delta h = M_i \cdot g \cdot \left(N_i \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

ezért

$$W_{Lotti} = M_{Al} \cdot g \cdot \left(N_{Al} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right) = N_{Al} \cdot m_{Al} \cdot \frac{a}{2} \cdot (N_{Al} - 1) \cdot g$$
$$= N_{Al} \cdot \rho_{Al} \cdot a^3 \cdot \frac{a}{2} \cdot (N_{Al} - 1) \cdot g$$

azaz

$$W_{Lotti} = \rho_{Al} \cdot g \cdot \frac{a^4}{2} \cdot N_{Al} \cdot (N_{Al} - 1)$$

és hasonlóan

$$W_{Peti} = \rho_{sárgaréz} \cdot g \cdot \frac{a^4}{2} \cdot N_{sr} \cdot (N_{sr} - 1)$$

A Lotti munkájára érvényes összefüggésből meghatározható az általa felhasznált alumínium kockák száma:

$$N_{Al} \cdot (N_{Al} - 1) = \frac{W_{Lotti}}{\rho_{Al} \cdot g \cdot \frac{a^4}{2}} = \frac{1{,}296\,J}{2700\,\frac{kg}{m^3} \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{0{,}02^4}{2} m^4} = \frac{1{,}296\,J}{0{,}00216\,J} = 600$$

Mivel a kockák darabszáma csak 40-nél kisebb egész szám lehet, próbálkozásokkal kitalálható, hogy

$$25 \cdot 24 = 600$$

azaz

$$N_{Al} = 25$$

Eszerint a Peti által felhasználható sárgaréz kockák száma

$$N_{sr} = N - N_{Al} = 40 - 25 = 15$$

így a Peti által épített torony magassága

$$h_{Peti} = N_{sr} \cdot a = 15 \cdot 2\ cm = 30\ cm$$

(Természetesen az alumíniumkockák darabszáma a másodfokú egyenlet megoldóképletének ismeretében is kiszámolható:

$$N_{Al} \cdot (N_{Al} - 1) = 600 \ \rightarrow N_{Al}^2 - N_{Al} - 600 = 0$$

$$N_{Al} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{2} = \frac{1 \pm 49}{2}$$

ahonnan a probléma szempontjából értelmezhető megoldás

$$N_{Al} = \frac{1 + 49}{2} = 25$$

ugyanúgy, ahogyan az a próbálkozással kitalálható.)

10 pont

b) Peti munkájának ismeretében meghatározható a sárgaréz sűrűsége:

$$W_{Peti} = \rho_{sárgaréz} \cdot g \cdot \frac{a^4}{2} \cdot N_{sr} \cdot (N_{sr} - 1) \ \rightarrow \ \rho_{sárgaréz} = \frac{W_{Peti}}{g \cdot \frac{a^4}{2} \cdot N_{sr} \cdot (N_{sr} - 1)}$$

azaz

$$\rho_{sárgaréz} = \frac{W_{Peti}}{10\frac{m}{s^2} \cdot \frac{0{,}02^4}{2} m^4 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{1{,}344\, J}{0{,}000168\, \frac{m^5}{s^2}} = 8000\ \frac{kg}{m^3}$$

Mivel az összetevők tömege és térfogata is összeadódik az ötvözésnél, felírható, hogy

$$V_{sárgaréz} = V_{réz} + V_{cink} \ \rightarrow \ \frac{m_{sárgaréz}}{\rho_{sárgaréz}} = \frac{m_{réz}}{\rho_{réz}} + \frac{m_{sárgaréz} - m_{réz}}{\rho_{cink}}$$

ahonnan

$$\frac{m_{sárgaréz}}{\rho_{sárgaréz}} = \frac{m_{réz}}{\rho_{réz}} + \frac{m_{sárgaréz}}{\rho_{cink}} - \frac{m_{réz}}{\rho_{cink}}$$

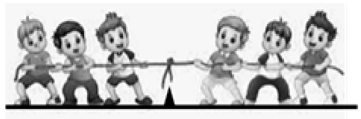
$$\frac{m_{sárgaréz} \cdot \left(\rho_{sárgaréz} - \rho_{cink}\right)}{\rho_{sárgaréz} \cdot \rho_{cink}} = \frac{m_{réz} \cdot (\rho_{réz} - \rho_{cink})}{\rho_{réz} \cdot \rho_{cink}}$$

$$\frac{m_{réz}}{m_{sárgaréz}} = \frac{\rho_{réz} \cdot \left(\rho_{sárgaréz} - \rho_{cink}\right)}{\rho_{sárgaréz} \cdot (\rho_{réz} - \rho_{cink})} = \frac{8920 \cdot (8000 - 7140)}{8000 \cdot (8920 - 7140)} = 0{,}5387$$

Tehát a Peti által használt kockák sárgaréz anyaga tömegének 53,87 %-a (kb. 54 %-a) réz.

10 pont

3. feladat: Peti és Bálint csapata kötélhúzó versenyben mérte össze az erejét: sípszóra mindkét csapat teljes erőből húzni kezdte az $1{,}2 \cdot 10^6$ N/m rugóállandójú kötelet. Azonban hiába fejtett ki a Peti által vezetett csapat 150 N nagyságú erőt, a kötél középső pontjára kötött szalag nem mozdult el a talajon lévő jelhez képest. Mekkora munkát végzett a döntetlen eredmény kiharcolása érdekében a Bálint által vezetett csapat?



Válasz:

A kötél egyensúlyban van, így mindkét végére ugyanakkora, F =150 N nagyságú erő hat. A kötél megnyúlását kétféle megfontolással is meghatározhatjuk:

- amennyiben az egyik csapat helyére pl. egy falat képzelünk, akkor a rögzítési pontban a fal nyilvánvalóan ugyanúgy 150 N nagyságú erőt gyakorol egyensúlyi helyzetben a kötél végére, mint az általa „helyettesített" csapat. Viszont ebben az elrendezésben könnyebben érthetőnek tűnik, hogy a kötél szabad végére a másik csapat által kifejtett 150 N nagyságú erő eredményezi a kötél megnyúlását, melynek mértéke

$$F = D \cdot \Delta l_{kötél} \;\rightarrow\; \Delta l_{kötél} = \frac{F}{D} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\, m = 0{,}125\, mm$$

- felfoghatjuk a helyzetet úgy is, hogy a kötél közepe rögzített, és egy fél-kötelet nyújt meg F erővel egy-egy csapat. Ekkor azonban tudnunk kell, hogy a fél kötél rugóállandója (direkciós ereje) kétszerese a teljes kötélnek, azaz az F erő által létrehozott megnyúlása

$$F = 2 \cdot D \cdot \Delta l_{félkötél} \;\rightarrow\; \Delta l_{félkötél} = \frac{F}{2 \cdot D} = 6{,}25 \cdot 10^{-5}\, m = 0{,}0625\, mm$$

  Tehát, mivel egy-egy csapat – azonos nagyságú erőt kifejtve – a teljes megnyúlás felét hozza létre:

$$\Delta l_{félkötél} = \frac{\Delta l_{kötél}}{2} \;\rightarrow\; \Delta l_{kötél} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\, m = 0{,}125\, mm$$

10 pont

Egy-egy csapat munkáját is különböző gondolatmenetekkel adhatjuk meg.
A középen rögzítettnek képzelt kötél egyik felét megnyújtó csapat munkáját kiszámíthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy az alkalmazott húzóerő a megnyúlással lineárisan nő. Mivel emiatt az átlagerő a maximális érték fele, ennek munkája:

$$W_{egy\,csapat} = \frac{F}{2} \cdot \Delta l_{félkötél} = \frac{2 \cdot D \cdot \Delta l_{félkötél}}{2} \cdot \Delta l_{félkötél} = D \cdot \left(\Delta l_{félkötél}\right)^2$$

$$W_{egy\,csapat} = 4{,}6875 \cdot 10^{-3}\, J$$

Természetesen a szimmetria miatt a két csapat egyforma nagyságú munkát végez.
(Úgy is gondolkodhatunk, hogy mivel a két csapat munkája a kötél rugalmas energiájának növekedését okozza, így

$$2 \cdot W = \Delta E_{rugalmas} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta l_{kötél})^2 = 9{,}375 \cdot 10^{-3}\, J$$

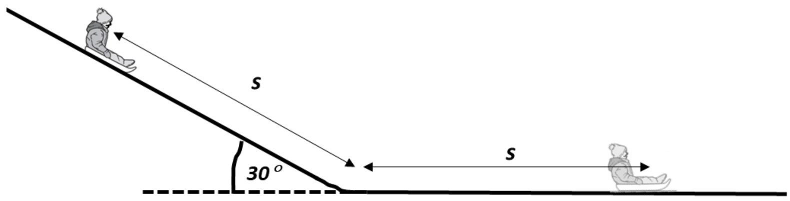
ahonnan az egyes csapatok munkájára

$$W = \frac{\Delta E_{rugalmas}}{2} = \frac{D \cdot (\Delta l_{kötél})^2}{4} = 4{,}6875 \cdot 10^{-3}\, J$$

adódik, ugyanúgy, mint a másik gondolatmenetben.)

10 pont

4. feladat: Mikor az egész környéket friss hó lepte el, a gyerekek szánkózni indultak. A vízszintessel 30°-os szöget bezáró domboldalról csúsztak le, hogy azután a lejtő folytatásában lévő vízszintes szakaszon lefékeződjenek. Laci megfigyelte, hogy a lejtő aljától mérve mindig éppen ugyanolyan hosszú úton álltak meg, mint amekkora távolságot a lejtőn lefelé megtettek. Mekkora a – teljes útszakaszon egyforma nagyságú – súrlódási együttható a szánkó talpa és a hó között?
A nehézségi gyorsulás értékét vedd $10\ \mathrm{m/s^2}$-nek!

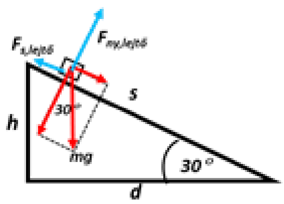


Válasz:

A teljes folyamatra a mozgási energia megváltozása zérus, ezért a szánkózóra ható erők munkáinak összege is nulla kell, hogy legyen. A munkatétel a szánkózóra felírva:

$$(\Delta E_{mozgási} =)0 = m \cdot g \cdot h - F_{s,lejtő} \cdot s - F_{s,sík} \cdot s$$

ahol h az indulás magassága a vízszintestől mérve, s a lejtőn, illetve a vízszintes szakaszon megtett út, $F_{s,lejtő}$ és $F_{s,sík}$ pedig a két szakaszon fellépő súrlódási erő nagysága.



A lejtőn lecsúszó szánkóra ható nehézségi erő a lejtő felületével párhuzamos, illetve arra merőleges komponensekre bontható.
A komponensek nagysága szögfüggvényekkel, vagy háromszögek hasonlóságára hivatkozással kifejezhető:

$$\left.\begin{aligned} F_{neh,\parallel} &= m \cdot g \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot \frac{h}{s} \\ F_{neh,\perp} &= m \cdot g \cdot cos\alpha = m \cdot g \cdot \frac{d}{s} \end{aligned}\right\}$$

ahol d a lejtőn megtett út vízszintes síkra ejtett vetülete.
A lejtő felületére merőleges komponens egyenlő nagyságú a lejtő által a szánkóra kifejtett nyomóerővel, így segítségével a domboldalon fellépő súrlódási erő kifejezhető:

$$F_{s,lejtő} = \mu \cdot F_{ny,lejtő} = \mu \cdot m \cdot g \cdot cos\alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{d}{s}$$

A vízszintes szakaszon a nyomóerő egyenlő nagyságú a nehézségi erővel, ezért a pálya azon részén a súrlódási erő:

$$F_{s,sík} = \mu \cdot F_{ny,sík} = \mu \cdot m \cdot g$$

Eszerint a munkatétel:

$$0 = m \cdot g \cdot h - \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{d}{s} \cdot s - \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

illetve

$$h = \mu \cdot d - \mu \cdot s$$

azaz

$$\mu = \frac{h}{d+s}$$

Az egyenlő oldalú háromszög tulajdonságait ismerve belátható, hogy a 30°-os szöggel szemben lévő fél-oldal és az oldalhossz hányadosa

$$\frac{h}{s} = \frac{1}{2}$$

a 30°-os szög mellett lévő magasság és az oldalhossz hányadosa pedig

$$\frac{d}{s} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ezért

$$\mu = \frac{h}{d+s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot s}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + s} = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 0{,}268$$

Tehát a hó felülete és a szánkó talpa között körülbelül 0,27 a súrlódási együttható nagysága. (Természetesen ugyanezt az eredményt kaphatjuk a szögfüggvények használatával is:

$$\mu = \frac{h}{d+s} = \frac{s \cdot sin\alpha}{s \cdot cos\alpha + s} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha + 1} = 0{,}268$$

ugyanúgy, mint az előbb.)

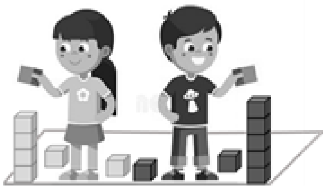
20 pont

XXVI. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2023
10. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.
Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

1. feladat: Lotti és Peti az ajándékba kapott építőkészletükben 40 darab 2 cm élhosszúságú játékkockát találtak, melyek egy része 2700 $\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű alumíniumból, másik része sárgarézből készült. A gyerekek elhatározták, hogy a szoba padlóján szétszórt kockákat egymásra rakva egy-egy tornyot építenek. Lottinak jutottak az alumíniumkockák: ő 1296 mJ munkát végzett, míg elkészült építményével. Peti a sárgaréz kockákból emelt tornyot, és 1344 mJ munkát kellett befektetnie, míg az utolsó darab is a helyére került.



a) Milyen magas lett a Peti által épített torony?
b) A sárgaréz építőkockák 8920 $\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű réz és 7140 $\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű cink ötvözetéből készültek. Az ötvözet tömegének hány százaléka réz?
Az ötvözés során bekövetkező térfogatváltozás elhanyagolható, a nehézségi gyorsulás értékét vedd 10 $\mathrm{m/s^2}$-nek!

Válasz:

a) Nyilvánvalóan

$$N = N_{Al} + N_{sr}$$

ahol N_{Al} az alumíniumból, N_{sr} a sárgarézből készült építőkockák száma.
A torony felépítéséhez (minimálisan) szükséges munka meghatározásához tegyük fel, hogy előbb a padlón egymás mellé csúsztatták kockáikat a gyerekek, majd a rendezett kockasort (nagyon lassan) függőleges helyzetbe állították. Ekkor az

$$M_i = N_i \cdot m_i$$

tömegű kockasor – ahol m_i egy kocka tömege – tömegközéppontja a padlótól mért $a/2$ magasságból $N_i \cdot a/2$ magasságba került. A végzett munka a magassági (helyzeti) energia megnöveléséhez szükséges,

$$W_i = M_i \cdot g \cdot \Delta h = M_i \cdot g \cdot \left(N_i \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

ezért

$$W_{Lotti} = M_{Al} \cdot g \cdot \left(N_{Al} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right) = N_{Al} \cdot m_{Al} \cdot \frac{a}{2} \cdot (N_{Al} - 1) \cdot g$$
$$= N_{Al} \cdot \rho_{Al} \cdot a^3 \cdot \frac{a}{2} \cdot (N_{Al} - 1) \cdot g$$

azaz

$$W_{Lotti} = \rho_{Al} \cdot g \cdot \frac{a^4}{2} \cdot N_{Al} \cdot (N_{Al} - 1)$$

és hasonlóan

$$W_{Peti} = \rho_{sárgaréz} \cdot g \cdot \frac{a^4}{2} \cdot N_{sr} \cdot (N_{sr} - 1)$$

A Lotti munkájára érvényes összefüggésből meghatározható az általa felhasznált alumínium kockák száma:

$$N_{Al} \cdot (N_{Al} - 1) = \frac{W_{Lotti}}{\rho_{Al} \cdot g \cdot \frac{a^4}{2}} = \frac{1{,}296\,J}{2700\,\frac{kg}{m^3} \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{0{,}02^4}{2} m^4} = \frac{1{,}296\,J}{0{,}00216\,J} = 600$$

Mivel a kockák darabszáma csak 40-nél kisebb egész szám lehet, próbálkozásokkal kitalálható, hogy

$$25 \cdot 24 = 600$$

azaz

$$N_{Al} = 25$$

Eszerint a Peti által felhasználható sárgaréz kockák száma

$$N_{sr} = N - N_{Al} = 40 - 25 = 15$$

így a Peti által épített torony magassága

$$h_{Peti} = N_{sr} \cdot a = 15 \cdot 2\,cm = 30\,cm$$

(Természetesen az alumíniumkockák darabszáma a másodfokú egyenlet megoldóképletének ismeretében is kiszámolható:

$$N_{Al} \cdot (N_{Al} - 1) = 600 \ \rightarrow N_{Al}^2 - N_{Al} - 600 = 0$$
$$N_{Al} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{2} = \frac{1 \pm 49}{2}$$

ahonnan a probléma szempontjából értelmezhető megoldás

$$N_{Al} = \frac{1 + 49}{2} = 25$$

ugyanúgy, ahogyan az a próbálkozással kitalálható.)

10 pont

b) Peti munkájának ismeretében meghatározható a sárgaréz sűrűsége:

$$W_{Peti} = \rho_{sárgaréz} \cdot g \cdot \frac{a^4}{2} \cdot N_{sr} \cdot (N_{sr} - 1) \ \rightarrow \ \rho_{sárgaréz} = \frac{W_{Peti}}{g \cdot \frac{a^4}{2} \cdot N_{sr} \cdot (N_{sr} - 1)}$$

azaz

$$\rho_{sárgaréz} = \frac{W_{Peti}}{10\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{0{,}02^4}{2} m^4 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{1{,}344\,J}{0{,}000168\,\frac{m^5}{s^2}} = 8000\ \frac{kg}{m^3}$$

Mivel az összetevők tömege és térfogata is összeadódik az ötvözésnél, felírható, hogy

$$V_{sárgaréz} = V_{réz} + V_{cink}\ \rightarrow\ \frac{m_{sárgaréz}}{\rho_{sárgaréz}} = \frac{m_{réz}}{\rho_{réz}} + \frac{m_{sárgaréz} - m_{réz}}{\rho_{cink}}$$

ahonnan

$$\frac{m_{sárgaréz}}{\rho_{sárgaréz}} = \frac{m_{réz}}{\rho_{réz}} + \frac{m_{sárgaréz}}{\rho_{cink}} - \frac{m_{réz}}{\rho_{cink}}$$

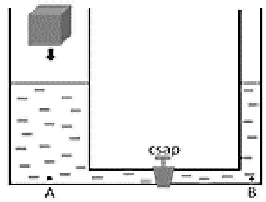
$$\frac{m_{sárgaréz} \cdot \left(\rho_{sárgaréz} - \rho_{cink}\right)}{\rho_{sárgaréz} \cdot \rho_{cink}} = \frac{m_{réz} \cdot (\rho_{réz} - \rho_{cink})}{\rho_{réz} \cdot \rho_{cink}}$$

$$\frac{m_{réz}}{m_{sárgaréz}} = \frac{\rho_{réz} \cdot \left(\rho_{sárgaréz} - \rho_{cink}\right)}{\rho_{sárgaréz} \cdot (\rho_{réz} - \rho_{cink})} = \frac{8920 \cdot (8000 - 7140)}{8000 \cdot (8920 - 7140)} = 0{,}5387$$

Tehát a Peti által használt kockák sárgaréz anyaga tömegének 53,87 %-a (kb. 54 %-a) réz.

10 pont

2. feladat: Egy 3 cm és egy 1 cm belső átmérőjű hengeres edényt alul csappal ellátott cső köt össze az ábra szerint. A csapot kinyitva annyi vizet töltünk a két, összeköttetésben álló edénybe, hogy bennük 10 cm magasságban álljon a víz.



a) Mekkora a víz súlyából származó nyomás az egyes edények alján (azaz az *A*, illetve *B* pontban)?

Az összekötő csövön lévő csapot elzárjuk, és egy 2 cm oldalélű, 750 kg/m^3 sűrűségű fa kockát teszünk a nagyobb átmérőjű cső vizébe.

b) Hány milliméter vastagságú része áll ki a vízből a stabil egyensúlyi helyzetben úszó kockának?

c) Mekkora lesz ekkor az *A* és *B* pontokban uralkodó nyomások különbsége?

d) Ha végül ismét kinyitjuk az összekötő csövön lévő csapot, milyen magasan állapodik meg a vízszint az egyes edényekben?

(A víz sűrűsége 1000 kg/m^3, a nehézségi gyorsulás értékét vegyük 10 m/s^2-nek!)

Válasz:

a) Nincs áramlás, egyensúlyban lévő közlekedőedény, ugyanazon a szinten azonosak a nyomások:

$$p_{A,0} = p_{B,0} = \rho_{víz} \cdot g \cdot h_0 = 1000\ Pa$$

3 pont

b) A kockára felírva az úszás egyensúlyi feltételét, a bemerülő térfogat megkapható:

$$\rho_{víz} \cdot V_{bemerülő} \cdot g = \rho_{fa} \cdot V_{fa} \cdot g$$

$$V_{bemerülő} = \frac{\rho_{fa} \cdot V_{fa}}{\rho_{víz}} = 0{,}75 \cdot V_{fa} = 6\ cm^3$$

Innen

$$V_{ki} = V_{fa} - V_{bemerülő} = 0{,}25 \cdot V_{fa} = 2\ cm^3$$

amiből

$$x_{ki} = \frac{V_{ki}}{a^2} = 0{,}5\ cm = 5\ mm$$

(Természetesen abból is kapható, hogy a térfogat 25%-a áll ki a vízből.)

4 pont

c) A nagyobb átmérőjű henger keresztmetszete

$$A_1 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 7{,}069\ cm^2$$

A kocka a tömegével egyenlő tömegű vizet szorít ki, ezért behelyezése egyenértékű azzal, mint ha

$$m_{kocka} = \rho_{fa} \cdot V_{fa} = \rho_{fa} \cdot a^3 = 6\ gramm$$

azaz

$$V_{bemerülő} = 6\ cm^3$$

vizet töltöttünk volna az A_1 keresztmetszetű edénybe, ezért a szintemelkedés:

$$\Delta h_1 = \frac{V_{bemerülő}}{A_1} \approx 0{,}85\ cm$$

azaz ebben az edényben

$$h_1 = h_0 + \Delta h_1 = 10{,}85\ cm$$

magasan fog állni a víz, a másik edényben továbbra is $h_0 = 10\ cm$ a vízoszlop magassága.
(Másképpen: A víz térfogata nem változhat az edényben, ezért

$$A_1 \cdot h_0 = A_1 \cdot (h_0 + \Delta h_1) - V_{bemerülő}$$

ahonnan

$$\Delta h_1 = \frac{V_{bemerülő}}{A_1} \approx 0{,}85\ cm$$

ugyanúgy, mint az előbb.)
A két edény alján jelentkező nyomások közötti különbség az $\Delta h_1 = 0{,}0085\ m$ magasságú vízoszlop hidrosztatikai nyomásával lesz egyenlő, azaz

$$\Delta p_1 = p_{A,1} - p_{B,1} = \rho_{víz} \cdot g \cdot \Delta h_1 \approx 85\ Pa$$

Másképpen: a nyomáskülönbség a behelyezett kocka súlyából származó nyomással egyenlő, azaz

$$\Delta p_1 = \frac{G_{kocka}}{A_1} = \frac{m_{kocka} \cdot g}{A_1} = \frac{\rho_{fa} \cdot a^3 \cdot g}{A_1} = \frac{6 \cdot 10^{-2} N}{7{,}069 \cdot 10^{-4}\ m^2} \approx 85\ Pa$$

6 pont

d.) A kisebb átmérőjű henger keresztmetszete:

$$A_2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 0{,}785\ cm^2$$

A két edényben egyforma magasságban kell állnia a vízszintnek (közlekedőedények, egyensúly, nyomásegyenlőség). Mivel a kocka behelyezése egyenértékű azzal, mintha $V_{bem} = 6 cm^3$ vizet töltöttünk volna be, és ez a „többlet” $A_1 + A_2$ felületen oszlik el, így a szintemelkedés

$$\Delta h_2 = \frac{V_{bemerülő}}{A_1 + A_2} \approx 0{,}76\ cm$$

azaz végállapotban a két edényben egyformán

$$h_{végső} = h_0 + \Delta h_2 \approx 10{,}76\ cm$$

magasságban áll majd a víz.
(Másképpen: a víz össztérfogata nem változhat a csap kinyitását követően. Az összekötő csőben és az edényekben lévő vízmennyiségek térfogat-összege változatlan:

$$A_1 \cdot (h_0 + \Delta h_1) - V_{bemerülő} + V_{cső} + A_2 \cdot h_0 = A_1 \cdot h_{végső} - V_{bemerülő} + A_2 \cdot h_{végső} + V_{cső}$$

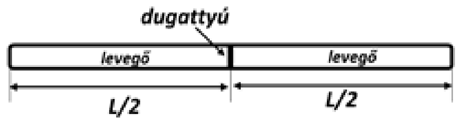
$$h_{végső} \cdot (A_1 + A_2) = h_0 \cdot (A_1 + A_2) + A_1 \cdot \Delta h_1$$

$$h_{végső} = h_0 + \frac{A_1 \cdot \Delta h_1}{A_1 + A_2} = h_0 + \frac{V_{bemerülő}}{A_1 + A_2} = h_0 + \Delta h_2 \approx 10{,}76\ cm$$

ugyanúgy, mint az előbb.)

7 pont

3. feladat: Mindkét végén leforrasztott, L=1 méter hosszúságú, 0,5 cm^2 keresztmetszetű üvegcsőbe zárt, normál légköri nyomású, szobahőmérsékletű levegőt a csőbe pontosan illeszkedő, könnyen mozgó, vékony, 5 gramm tömegű dugattyú két egyenlő térfogatú részre oszt szét. A csövet szeretnénk az egyenesébe eső, vízszintes irányú, $0 - 20\ \mathrm{m/s^2}$ tartományba eső gyorsulások mérésére használni, mivel megtapasztaltuk, hogy a cső sebességváltozása esetén a dugattyú kimozdul a felezőpontból.



a) A könnyű kezelhetőség érdekében olyan skálával akarjuk ellátni eszközünket, melyről közvetlenül leolvasható a gyorsulása. Számítsd ki, hogy a cső felezőpontjában megjelölt 0 értéktől mérve hány milliméterre kerüljön az 1, 5, 10, illetve 20 $\mathrm{m/s^2}$ nagyságú gyorsuláshoz tartozó beosztás!

b) Használható-e gyorsulásmérésre az így hitelesített (skálabeosztásokkal ellátott) eszközünk szobahőmérsékletnél alacsonyabb, vagy magasabb hőmérsékleten is? Válaszodat indokold meg!

A gáz hőmérséklete a gyorsítási folyamatokban állandónak tekinthető. Felhasználhatod, hogy amennyiben $|x| < 0{,}25$, nagy pontossággal – körülbelül 1 %-os hibával – érvényes a

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

közelítés.

Válasz:

a) A dugattyú két oldalán fellépő nyomások különbségéből származó erőnek kell a dugattyút a csővel azonos gyorsulással mozgatnia. A hőmérséklet állandósága miatt a Boyle-Mariotte törvény alkalmazható:

$$\left.\begin{aligned} p_1 \cdot A \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) &= p_0 \cdot A \cdot \frac{L}{2} \\ p_2 \cdot A \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right) &= p_0 \cdot A \cdot \frac{L}{2} \end{aligned}\right\}$$

ahol p_1 a gyorsulás irányával ellentétes, p_2 a gyorsulás irányába eső térrészben uralkodó gáznyomás, A a cső belső keresztmetszete, L a cső hossza, x a dugattyú középhelyzetből való kitérése, p_0 az egyensúlyi állapotban egy-egy féltérben uralkodó gáznyomás, ami

$$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa \approx 10^5\ Pa$$

A dinamika alapegyenlete szerint:

$$(p_1 - p_2) \cdot A = m \cdot a$$

azaz

$$\left(\frac{p_0 \cdot \frac{L}{2}}{\left(\frac{L}{2} - x\right)} - \frac{p_0 \cdot \frac{L}{2}}{\left(\frac{L}{2} + x\right)}\right) \cdot A = m \cdot a$$

$$\frac{2 \cdot x}{\frac{L^2}{4} - x^2} \cdot p_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot A = m \cdot a$$

$$\frac{4 \cdot x}{L^2 - 4 \cdot x^2} \cdot p_0 \cdot L \cdot A = m \cdot a$$

Innen a dugattyú kitérésének gyorsulásfüggésére adódó összefüggés

$$\frac{x}{L^2 - 4 \cdot x^2} = \frac{m}{4 \cdot p_0 \cdot L \cdot A} \cdot a$$

$$4 \cdot p_0 \cdot L \cdot A \cdot x = m \cdot a \cdot L^2 - 4 \cdot x^2 \cdot a$$

azaz a dugattyú kitérésére egy másodfokú egyenletet kaptunk:

$$4 \cdot a \cdot x^2 + 4 \cdot p_0 \cdot L \cdot A \cdot x - m \cdot a \cdot L^2 = 0$$

A megoldóképletet alkalmazva:

$$x = \frac{-4 \cdot p_0 \cdot L \cdot A \pm \sqrt{16 \cdot p_0^2 \cdot L^2 \cdot A^2 + 16 \cdot m \cdot L^2 \cdot a^2}}{8 \cdot a}$$

A fizikai szempontból értelmes gyök:

$$x = \frac{\sqrt{16 \cdot p_0^2 \cdot L^2 \cdot A^2 + 16 \cdot m \cdot L^2 \cdot a^2} - 4 \cdot p_0 \cdot L \cdot A}{8 \cdot a} = \frac{L \cdot p_0 \cdot A \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{m \cdot a^2}{p_0^2 \cdot A^2}} - 1\right)}{2 \cdot a}$$

Mivel

$$\frac{m \cdot a^2}{p_0^2 \cdot A^2} = 10^{-8} \cdot a^2 \ll 0{,}25$$

így használhatjuk a közelítő formulát:

$$x \approx \frac{L \cdot p_0 \cdot A \cdot \left(1 + \frac{m \cdot a^2}{2 \cdot p_0^2 \cdot A^2} - 1\right)}{2 \cdot a} = \frac{L \cdot m}{4 \cdot p_0 \cdot A} \cdot a$$

illetve az adatok behelyettesítésével

$$x \approx \frac{L \cdot m}{4 \cdot p_0 \cdot A} \cdot a = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{\frac{m}{s^2}} \cdot a = 0{,}25 \frac{mm}{\frac{m}{s^2}} \cdot a$$

vagyis a vizsgált gyorsulás-intervallumban a dugattyú kitérésének mértéke egyenesen arányos a gyorsulás nagyságával.

(Ha a versenyző áttér a megadott értékek behelyettesítésére:

$$\frac{x}{L^2 - 4 \cdot x^2} = \frac{m}{4 \cdot p_0 \cdot L \cdot A} \cdot a$$

$$\frac{x}{1\,m^2 - 4 \cdot x^2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} kg}{4 \cdot 10^5\,Pa \cdot 1\,m \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} m^2} \cdot a$$

illetve a mértékegységeket elhagyva

$$\frac{x}{1 - 4 \cdot x^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot a$$

A dugattyú kitérésére adódó másodfokú egyenlet:

$$10^{-3} \cdot a \cdot x^2 + x - 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot a = 0$$

A megoldóképletet alkalmazva:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 10^{-6} \cdot a^2}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot a}$$

A fizikai szempontból értelmes gyök:

$$x = \frac{\sqrt{1 + 10^{-6} \cdot a^2} - 1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot a}$$

Ezt az összefüggést használva is meghatározhatjuk a keresett távolságokat.)

Az adott gyorsulásértékekhez tartozó beosztások 0 ponttól mért távolsága ezek után bármelyik formulát választva meghatározható:

$$x_1 = \frac{\sqrt{1 + 10^{-6}} - 1}{2 \cdot 10^{-3}} = 2{,}499 \cdot 10^{-4}\,m \quad ill. \quad x_1 \approx 0{,}25 \frac{mm}{\frac{m}{s^2}} \cdot a_1 = 0{,}25\,mm$$

$$x_5 = \frac{\sqrt{1 + 10^{-6} \cdot 25} - 1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 5} = 1{,}249 \cdot 10^{-3}\, m \approx 1{,}25\, mm$$
$$x_{10} = \frac{\sqrt{1 + 10^{-6} \cdot 100} - 1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 2{,}499 \cdot 10^{-3}\, m \approx 2{,}5\, mm$$
$$x_{20} = \frac{\sqrt{1 + 10^{-6} \cdot 400} - 1}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 20} = 4{,}9995 \cdot 10^{-3}\, m \approx 5\, mm$$

14 pont

b) Használjuk fel a

$$p_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot A = n \cdot R \cdot T$$

állapotegyenletet!
Az *a)* pontban beláttuk, hogy a vizsgált gyorsulás-intervallumban a dugattyú kitérésének mértéke egyenesen arányos a gyorsulás nagyságával, azaz

$$x \approx \frac{L \cdot m}{4 \cdot p_0 \cdot A} \cdot a$$

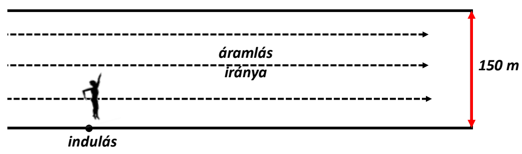
Az állapotegyenletet felhasználva

$$x \approx \frac{m \cdot L^2}{8 \cdot n \cdot R \cdot T} \cdot a$$

Látható, hogy minél nagyobb a gáz (bezárt levegő) abszolút hőmérséklete, annál kisebb a dugattyú középtől való kitérése egy adott gyorsulásértéknél.
Eszerint, bár a cső gyorsulásmérésre elvileg alacsonyabb és magasabb hőmérsékleten is alkalmas, de a szobahőmérsékleten hitelesített skála már nem lesz használható más hőmérsékleten.

6 pont

4. feladat: Laci a szegedi uszodában teljes erőbedobással 40 s alatt úszta át az 50 méteres medencét. „Érdekes – gondolta magában – a sebességem pontosan $(\sqrt{3}+2)$-szöröse a Tisza áramlási sebességének! Holnap át is úszom!”



a) Hány km/h a Tisza áramlási sebessége?
b) Mennyi idő alatt jut át Laci a 150 m széles Tisza túlsó partjára, ha mindvégig a víz áramlási sebességére merőleges irányban úszik? Folyásirányban mérve hány méterrel sodorja lejjebb a víz, míg megérkezik az átellenes partra?
c) Mennyi idő alatt tud az átkelés során elért pontból visszaúszni arra a helyre, ahol eredetileg a vízbe ugrott? Milyen irányban kell úsznia, hogy célba érhessen?
(Feltételezzük, hogy Laci az oda-vissza út mindkét szakaszán teljes erőbedobással úszik.)

Válasz:

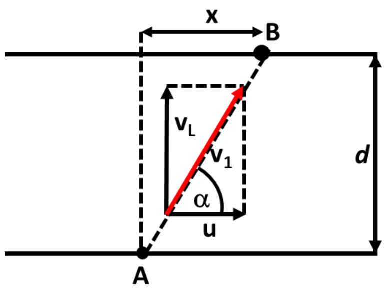
a) Az állóvízben történő úszásra vonatkozó adatokból kiszámítható Laci vízhez viszonyított sebessége, amikor teljes erőbedobással úszik:

$$v_L = \frac{s}{t} = \frac{50\ m}{40\ s} = 1{,}25\ \frac{m}{s}$$

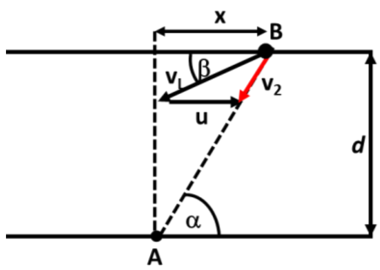
Ebből következően a Tisza áramlási sebessége

$$u = \frac{v_L}{\sqrt{3}+2} = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot v_L \approx 0{,}335\ \frac{m}{s} \approx 1{,}2\ \frac{km}{h}$$

2 pont



a. ábra



b. ábra

b) Laci mozgása az áramlásra (ill. a partra) merőleges v_L sebességű, és az áramlással egyirányú (parttal párhuzamos) *u* sebességű mozgás összetételeként fogható fel.
(Ld. az *a. ábrát*, amelyen v_1 az úszó parthoz viszonyított sebessége, *x* a lefelé sodródás távolsága.)
Az átkelés idejét a folyó áramlási sebessége nem befolyásolja, így:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{d}{v_L} \\ x &= u\cdot t_1 \end{aligned}\right\}$$

Innen

$$t_1 = \frac{d}{v_L} = \frac{150\ m}{1{,}25\ \frac{m}{s}} = 120\ s$$

és

$$x = u\cdot t_1 = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot v_L\cdot t_1 \approx 0{,}335\ \frac{m}{s}\cdot 120\ s = 40{,}2\ m$$

Tehát Laci 120 s (2 perc) alatt ússza át a Tiszát, és a kiindulási pontjától folyásirányban mérve 40,2 méterrel odébb („lejjebb") lévő *B* pontban éri el a túlsó partot.

6 pont

c) (A feladatnak ezt a részét többféle úton is meg lehet oldani, ezek közül kettőt ismertetünk. Az első gondolatmenetben csak egy nevezetes szög szögfüggvényét kell felismerni, a második megoldás a szögfüggvények alaposabb ismeretét feltételezi.)

□ Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az oda-vissza utat pihenés nélkül teszi meg Laci! Rögzítsük vonatkoztatási rendszerünket a vízhez úgy, hogy *t*=0-ban, Laci vízbe ugrásakor a parton lévő kiindulási pont (*A*) legyen az origóban, azaz a folyásiránnyal szemben irányított *x* tengely és a rá merőlegesen irányított *y* tengely metszéspontjában:

$$t = 0 - ban \qquad\qquad A(0,0)$$

Az oda-vissza út időtartama alatt az *A* pont az *x* tengely mentén *u* sebességgel haladva

$$x_{A,1-2} = u \cdot (t_1 + t_2)$$

távolságot tesz meg, azaz koordinátái

$$t = t_1 + t_2 - ben \qquad\qquad A'[u \cdot (t_1 + t_2), 0]$$

Az első átkelés t_1 időtartama alatt Laci a *B* pontba érkezett, ami ebben a pillanatban a vonatkoztatási rendszer *y* tengelyére esik, origótól mért távolsága éppen a folyó szélessége, koordinátái

$$t = t_1 - ben \qquad\qquad B(0, v_L \cdot t_1) = B(0, d)$$

A második átkelés során ebből a *B* pontból indulva Lacinak t_2 idő alatt az $A'[u \cdot (t_1 + t_2), 0]$ pontba kell eljutnia, ahol „találkozik" az *u* sebességgel éppen odaérkező *A* ponttal, azaz az

$$s^2 = u^2 \cdot (t_1 + t_2)^2 + d^2$$
$$s^2 = u^2 \cdot (t_1 + t_2)^2 + v_L^2 \cdot t_1^2$$

összefüggésből kapható *s* távolságot kell megtennie. Mivel a vízhez – azaz a választott vonatkoztatási rendszerhez – viszonyított sebessége v_L, az ennek megtételéhez szükséges idő

$$t_2 = \frac{s}{v_L}$$

A keresett időtartamra nézve tehát a következő egyenlet írható fel:

$$v_L^2 \cdot t_2^2 = u^2 \cdot (t_1 + t_2)^2 + v_L^2 \cdot t_1^2$$

Négyzetre emelést és egyenletrendezést követően kaphatjuk, hogy

$$(v_L^2 - u^2) \cdot t_2^2 - 2 \cdot u^2 \cdot t_1 \cdot t_2 - (v_L^2 + u^2) \cdot t_1^2 = 0$$

A másodfokú egyenletet megoldva

$$t_2 = \frac{2 \cdot u^2 \cdot t_1 \pm \sqrt{4 \cdot u^4 \cdot t_1^2 + 4 \cdot v_L^4 \cdot t_1^2 - 4 \cdot u^4 \cdot t_1^2}}{2 \cdot (v_L^2 - u^2)} = \frac{2 \cdot u^2 \cdot t_1 \pm 2 \cdot v_L^2 \cdot t_1}{2 \cdot (v_L^2 - u^2)}$$

A fizikai szempontból értelmes gyök

$$t_2 = \frac{(v_L^2 + u^2) \cdot t_1}{(v_L^2 - u^2)} = \frac{\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 + 1}{\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 - 1} \cdot t_1 = \frac{8 + 4 \cdot \sqrt{3}}{6 + 4 \cdot \sqrt{3}} \cdot t_1$$

$$t_2 = \frac{4 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(6 - 4 \cdot \sqrt{3}\right)}{36 - 48} \cdot t_1 = \frac{-8 \cdot \sqrt{3}}{-12} \cdot t_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot t_1 \approx 138{,}6\ s$$

Laci sebességének az adott vonatkoztatási rendszer *x* tengelyével bezárt szögére nézve

$$tg\beta = \frac{d}{u \cdot (t_1 + t_2)} = \frac{t_1}{\left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot (t_1 + t_2)} = \frac{1}{\left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)}$$

ahonnan

$$tg\beta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \beta = 60°$$

Tehát, amennyiben Laci az áramlás irányával 120 fokot bezáró irányban (azaz a part egyenesével 60 fokos szöget bezáró irányban, a folyásiránnyal szemben) úszik, akkor körülbelül 138,6 másodperc alatt visszaérkezik abba a pontba, ahol először a vízbe ugrott.

12 pont

☐ Rögzítsük vonatkoztatási rendszerünket a parthoz!

Ahhoz, hogy az *A* pontba visszatérhessen, Laci parthoz viszonyított v_2 sebességének az *AB* szakasz egyenesével egybeesve *A* felé kell mutatnia. Mivel

$$\vec{v}_L = \vec{v}_2 - \vec{u}$$

a *b. ábráról* leolvasható, hogy

$$\left.\begin{array}{c} v_L \cdot cos\beta - u = v_2 \cdot cos\alpha \\ v_L \cdot sin\beta = v_2 \cdot sin\alpha \end{array}\right\}$$

ahol β Laci vízhez viszonyított sebességének a part egyenesével bezárt szöge, az α szögre pedig

$$tg\alpha = \frac{d}{x}$$

teljesül, azaz

$$tg\alpha = \frac{d}{x} = \frac{v_L \cdot t_1}{u \cdot t_1} = \frac{v_L}{u} = \sqrt{3} + 2 \rightarrow \alpha = 75°$$

illetve

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \sqrt{3} + 2 \rightarrow sin\alpha = \left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot cos\alpha$$

A sebességkomponensekre felírt egyenletek átalakításával:

$$\left.\begin{array}{r} v_L \cdot cos\beta - u = v_2 \cdot cos\alpha \\ v_L \cdot sin\beta = v_2 \cdot \left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot cos\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{3} + 2 = \frac{v_L \cdot sin\beta}{v_L \cdot cos\beta - u}$$

Figyelembe véve, hogy

$$v_L = \left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot u$$

kaphatjuk, hogy

$$\left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot cos\beta - 1 = sin\beta$$

Egy négyzetre emelés, és a trigonometrikus Pitagorasz-tétel figyelembe vételével:

$$\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 \cdot cos^2\beta - 2 \cdot \left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot cos\beta + 1 = sin^2\beta$$

$$\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 \cdot cos^2\beta - 2 \cdot \left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot cos\beta + 1 = 1 - cos^2\beta$$

Mivel cosβ≠0,

$$\left[\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 + 1\right] \cdot cos\beta = 2 \cdot \left(\sqrt{3} + 2\right)$$

ahonnan

$$cos\beta = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3} + 2\right)}{\left(\sqrt{3} + 2\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

tehát

$$\beta = 60°$$

ugyanúgy, mint a másik megoldásban.

Ezt az eredményt figyelembe véve Laci parthoz viszonyított v_2 sebességére

$$v_L \cdot sin\beta = v_2 \cdot sin\alpha \rightarrow v_2 = \frac{v_L \cdot sin\beta}{sin\alpha}$$

miatt

$$v_2 = \frac{1{,}25\ \frac{m}{s} \cdot sin60°}{sin75°} = 1{,}1207\ \frac{m}{s} \approx 1{,}12\ \frac{m}{s}$$

adódik. A visszaút időtartama ezért

$$t_2 = \frac{S}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v_2} = \frac{155{,}29\ m}{1{,}12\ \frac{m}{s}} = 138{,}6\ s$$

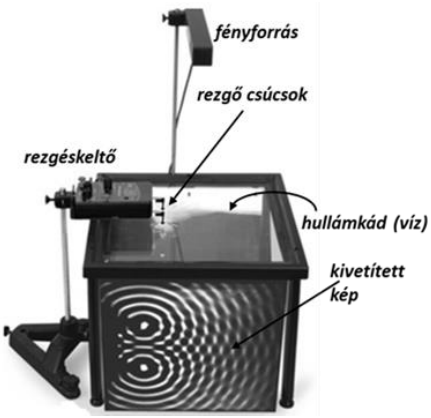
(Természetesen a második megoldás is **12 pontot** érdemel.)

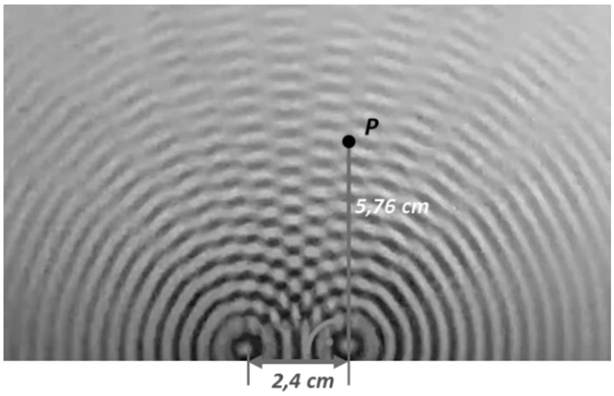
XXVI. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2023
11. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.
Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

1. feladat: Rezgéskeltő berendezéshez csatlakoztatott, egymástól 1,5 cm távolságban lévő két csúcs azonos fázisú harmonikus rezgése során ütögeti a hullámkádban lévő víz felszínét, 35 Hz frekvenciájú koherens hullámokat keltve. A kivetített képen a két csúcs távolságát 2,4 cm-nek, két szomszédos sötét körvonal távolságát pedig 0,96 cm-nek mérjük.
a) Mekkora sebességgel terjednek a víz felszínén a csúcsok által keltett hullámok?
b) Milyen interferenciajelenséget figyelhetünk meg a kivetített képnek abban a *P* pontjában, amely a rezgő csúcsokat elválasztó szakasz egyik végpontjában emelt merőlegesen, a végponttól 5,76 cm távolságban van?





Válasz:

a) A kivetített kép nagyított, hiszen a valóságban d=1,5 cm távolságban lévő csúcsok a kivetített képen egymástól 2,4 cm távolságban jelennek meg. A nagyítás

$$N = \frac{K}{T} = \frac{D}{d} = \frac{2,4\ cm}{1,5\ cm} = 1,6$$

Két szomszédos sötét (vagy világos) körvonal távolságát lemérve éppen a hullámhosszt kapnánk meg, amennyiben a kép nem lenne nagyított (illetve *N*=1 lenne). A nagyítást figyelembe véve azonban így is megkaphatjuk a hullámhossz értékét:

$$N = \frac{\lambda_{kép}}{\lambda_{víz}} \ \rightarrow \ \lambda_{víz} = \frac{\lambda_{kép}}{N} = \frac{0,96\ cm}{1,6} = 0,6\ cm$$

Ezzel a hullámterjedés sebessége:

$$c = \lambda_{víz} \cdot f = 0,006\ m \cdot 35\ Hz = 0,21\ \frac{m}{s} = 21\ \frac{cm}{s}$$

10 pont

b) A kivetített képen a *P* pont távolsága a másik hullámforrástól a Pitagorasz-tétel alapján:

$$s_2^2 = D^2 + s_1^2 \ \rightarrow s_2 = \sqrt{(2,4\ cm)^2 + (5,76\ cm)^2} = 6,24\ cm$$

A képen megjelenő két forrásból kiinduló, és a *P* pontban találkozó „képhullámok" úthosszkülönbsége

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 6,24\ cm - 5,76\ cm = 0,48\ cm$$

azaz éppen a képen megfigyelhető hullámhossz fele. Ebből a „képhullámok" ellentétes fázisban való találkozására következtethetünk.

Természetesen a nagyítást figyelembe véve, a hullámkádban végbemenő történéseket, a „valódi" hullámtalálkozást elemezve ugyanerre az eredményre juthatunk. Ugyanis a hullámkádban lévő víz felületén az egyik csúcstól

$$s_{1,víz} = \frac{s_1}{N} = \frac{5,76}{1,6} = 3,6\ cm$$

távolságban, a csúcsokat összekötő *d*=1,5 cm hosszú szakasz végpontjában emelt merőlegesre illeszkedő *R* pontnak a másik csúcstól mért távolsága

$$s_{2,víz}^2 = d^2 + s_{1,víz}^2 \ \rightarrow s_2 = \sqrt{(1,5\ cm)^2 + (3,6\ cm)^2} = 3,9\ cm \ \left(= \frac{s_2}{N} = \frac{6,24\ cm}{1,6}\right)$$

(Az *R* az a pont, amelynek a *P* pont a kivetített képe.)

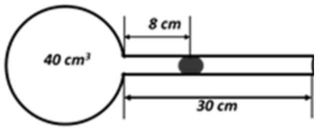
Azaz a víz felszínén terjedő, az *R* pontban találkozó hullámok úthosszkülönbsége

$$\Delta s_{víz} = s_{2,víz} - s_{1,víz} = 3,9\ cm - 3,6\ cm = 0,3\ cm \ \left(= \frac{\Delta s}{N} = \frac{0,48\ cm}{1,6}\right)$$

Ebből következik, hogy a két hullámforrásból kiinduló hullámok az *R* – illetve a „képhullámok" a *P* – pontban *ellentétes fázisban találkoznak, ezért gyengítik, illetve* – azonos rezgési amplitúdót feltételezve, ami a technikai megvalósításból következik – *kioltják egymást*. A vízfelület ebben a pontban tartósan nyugalomban marad, a kép itt szürke (nem felváltva világos, illetve sötét).

10 pont

2. feladat: A 40 cm^3 térfogatú üveggömbben, és a vele összeköttetésben álló, 30 cm hosszúságú, 5 mm^2 keresztmetszetű cső egy részében lévő levegőt kis higanycsepp zárja el a külvilágtól. 18 °C hőmérsékleten a csepp a gömb és a cső csatlakozásától mérve 8 cm távolságban helyezkedik el. Állandó külső légnyomás mellett – megfelelő beosztásokkal ellátva – az eszköz hőmérsékletmérésre használható. Milyen tartományba eső hőmérsékletértékeket lehet vele mérni?



Válasz:

A bezárt gáz (levegő) V_T térfogata T hőmérsékleten a gömb és a higanycseppig terjedő csőszakasz térfogatának összege:

$$V_T = V_l + A \cdot l_T$$

ahol V_l a gömb térfogata, A a cső keresztmetszete, l_T a higanycseppnek a gömb és a cső csatlakozásától mért távolsága T hőmérsékleten.

Mivel a csepp szabadon elmozdulhat, a gáz nyomása minden hőmérsékleten egyenlő lesz az állandó légköri nyomással. Emiatt

$$\frac{V_T}{T} = \frac{V_{18}}{T_{18}}$$

ahol

$$V_{18} = V_l + A \cdot l_{18} \quad és \quad A = 5\ mm^2 = 5 \cdot 10^{-2}\ cm^2$$

A legalacsonyabb hőmérséklet mérése esetén a higanycsepp a gömb és a cső csatlakozásánál, a legmagasabb hőmérséklet mérésekor pedig a cső nyitott végénél lesz. Azaz

$$V_{T,min} = V_l$$

és

$$V_{T,max} = V_l + A \cdot L$$

Ennek megfelelően

$$\frac{V_l}{T_{min}} = \frac{V_{18}}{T_{18}} \ \rightarrow \ T_{min} = \frac{V_l}{V_{18}} \cdot T_{18}$$

azaz $T_{18} = (18 + 273)\ K = 291\ K$ miatt

$$T_{min} = \frac{V_l}{V_{18}} \cdot T_{18} = \frac{V_l}{V_l + A \cdot l_{18}} \cdot T_{18} = \frac{40\ cm^3}{40\ cm^3 + 5 \cdot 10^{-2}\ cm^2 \cdot 8\ cm} \cdot 291\ K = 288{,}1\ K$$

$$T_{min} \approx 15\ °C$$

illetve

$$\frac{V_l + A \cdot L}{T_{max}} = \frac{V_{18}}{T_{18}} \ \rightarrow \ T_{max} = \frac{V_l + A \cdot L}{V_{18}} \cdot T_{18}$$

és

$$T_{max} = \frac{V_l + A \cdot L}{V_{18}} \cdot T_{18} = \frac{V_l + A \cdot L}{V_l + A \cdot l_{18}} \cdot T_{18} = \frac{40\ cm^3 + 5 \cdot 10^{-2}\ cm^2 \cdot 30\ cm}{40\ cm^3 + 5 \cdot 10^{-2}\ cm^2 \cdot 8\ cm} \cdot 291\ K$$

$$T_{max} = 298{,}9\ K \approx 26\ °C$$

Tehát körülbelül a

$$26\ °C > t > 15\ °C$$

illetve

$$299\ K > T > 288\ K$$

intervallumba eső hőmérsékletértékek mérhetők ezzel az eszközzel.

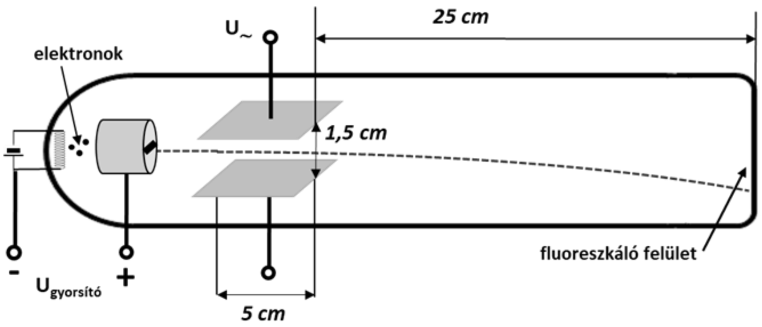
20 pont

3. feladat: 35 cm hosszú, 8 cm átmérőjű hengeres vákuumcsőbe épített izzókatódból kilépő, majd 1500 V feszültséggel vízszintes irányú sebességre gyorsított elektronok keskeny nyalábja vízszintes helyzetű, egymástól 1,5 cm távolságban lévő, 5 cm hosszúságú alumíniumlemezek által alkotott síkkondenzátor fegyverzetei közé lép, a lemezeket elválasztó távolság felének magasságában. A cső katóddal szemben lévő, gyakorlatilag síkfelületnek tekinthető fala 25 cm távolságban van a lemezektől, és olyan festékkel van bevonva, melyet a gyors egymásutánban becsapódó elektronok zöldes fényű fluoreszkálásra gerjesztenek.

a) Maximálisan mekkora szöggel terülnek el az elektronok eredeti haladási irányuktól, amennyiben a kondenzátorlemezekre 30 V effektív értékű, szinuszosan váltakozó feszültséget kapcsolnak?

b) Milyen hosszú, zöld színben fluoreszkáló egyenes szakasz figyelhető meg a „képernyőn” a váltakozó feszültség kondenzátorra kapcsolását követően? Az eredményt milliméterben, egész számra kerekítve add meg!

Az elektron töltése $1{,}6\cdot10^{-19}$ C, tömege $9{,}1\cdot10^{-31}$ kg. A földi mágneses mező hatását, valamint a lemezpárok között kialakuló elektromos mezőnek a viszonylag nagy lemeztávolság miatti szóródását hagyjuk figyelmen kívül!



Válasz:

a) A munkatétel alapján

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = q\cdot U_{gyorsító}$$

ahonnan a gyorsítási szakasz végén az elektronok sebessége

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot q\cdot U_{gyorsító}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot10^{-19}\ C\cdot 1500\ V}{9{,}1\cdot10^{-31}\ kg}}=2{,}2967\cdot10^{7}\ \frac{m}{s}$$

Az eltérítő kondenzátor elektromos mezeje abban a pillanatban lesz a legerősebb, amikor a váltakozó feszültség csúcsértéke lép fel. Szinuszosan váltakozó feszültségről lévén szó, ez az érték

$$U_{max}=U_{eff}\cdot\sqrt{2}=30\ V\cdot\sqrt{2}=42{,}426\ V$$

ezért a maximális térerősség

$$E_{max}=\frac{U_{max}}{d}=\frac{42{,}426\ V}{0{,}015\ m}=2828{,}43\ \frac{N}{C}$$

A vízszintes síkú lemezpár az elektronokat eredeti haladási irányuktól függőlegesen eltéríti, mégpedig a pillanatnyi térerősséggel ellentétes irányban. Az elektronok mozgása a lemezek közötti homogénnek tekinthető mezőben egy vízszintes irányú állandó sebességű mozgás, és egy függőleges irányú állandó gyorsulású mozgás összetételeként fogható fel.

$$\left.\begin{aligned} x &= v \cdot t \\ y &= \frac{a}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\} \quad ill. \quad \left.\begin{aligned} v_x &= v \\ v_y &= a \cdot t \end{aligned}\right\}$$

A lemezek között az elektronok gyorsulása az elektromos térerősség pillanatnyi értékétől függ, a kis tömeg miatt ugyanis a gravitációs erő hatása elhanyagolható.

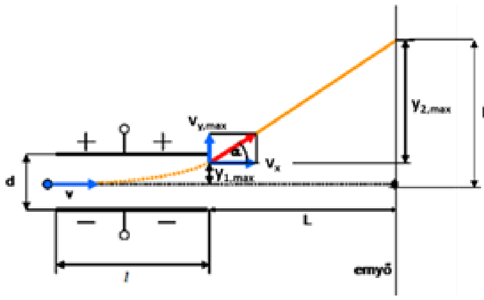
$$q \cdot E = m \cdot a$$

A gyorsulás nagysága maximum

$$a = \frac{q \cdot E}{m} \rightarrow a_{max} = \frac{q \cdot E_{max}}{m} = \frac{q}{m} \cdot \frac{U_{max}}{d} = \frac{q \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{m \cdot d} = 4{,}973 \cdot 10^{14}\ \frac{m}{s^2}$$

lehet, iránya függőlegesen lefelé, vagy felfelé mutat.

Először meghatározzuk, maximálisan mennyivel kerül feljebb, illetve lejjebb egy elektron kilépési pontja a belépési pontnál, valamint hogy milyen irányú sebességgel rendelkezhet a lemezek közül történő kilépés pillanatában a részecske.



$$\left.\begin{aligned} l &= v \cdot t_{áthaladás} \\ y_{1,max} &= \frac{a_{max}}{2} \cdot t^2_{áthaladás} \end{aligned}\right\}$$

(Részeredmény:

$$t_{áthaladás} = \frac{l}{v} = \frac{0{,}05\ m}{2{,}2967 \cdot 10^7\ \frac{m}{s}} = 2{,}177 \cdot 10^{-9}\ s$$

a lemezek közötti áthaladás időtartama.)

$$y_{1,max} = \frac{a_{max}}{2} \cdot \frac{l^2}{v^2} = \frac{l^2 \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot d \cdot U_{gyorsító}} = 1{,}1785 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$y_{1,max} \approx 1{,}18\ mm$$

Tehát az elektronok legfeljebb a belépés szintjénél kb. 1,18 mm-rel feljebb, vagy lejjebb léphetnek ki a kondenzátorlemezek közül.

A lemezek közötti térből történő kilépésnél az elektron sebességkomponensei:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v \\ v_{y,max} &= a_{max} \cdot t_{áthaladás} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_{gyorsító}}{m}} = 2{,}2967 \cdot 10^7\ \frac{m}{s} \\ v_{y,max} &= \frac{q \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{m \cdot d} \cdot \frac{l}{v} = \frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{d} \cdot \sqrt{\frac{q}{2 \cdot m \cdot U_{gyorsító}}} \end{aligned}\right\}$$

(Részeredmény:

$$v_{y,max} = a_{max} \cdot t_{áthaladás} = 1{,}0826 \cdot 10^6\ \frac{m}{s}$$

a függőleges irányú sebességkomponens maximuma.)

Mivel az elektron sebessége a pálya érintőjének irányában mutat, a sebességkomponensekből kiszámítható a kilépési pontban az érintő (az elektron kilépési iránya) vízszintessel bezárt maximális szöge, azaz a keresett legnagyobb szögeltérülés:

$$tg\alpha = \frac{v_{y,max}}{v_x} = \frac{\frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{d} \cdot \sqrt{\frac{q}{2 \cdot m \cdot U_{gyorsító}}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_{gyorsító}}{m}}} = \frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot d \cdot U_{gyorsító}} = 0{,}04714$$

azaz maximálisan

$$\alpha_{max} = 2{,}69895° \approx 2{,}7°$$

szöggel térülnek el az elektronok eredeti haladási irányuktól.

12 pont

b) A lemezek közti tér elhagyása után az elektron az ernyőig egyenes pályán mozog a kilépés pillanatában meglévő sebességével. A kilépési pont szintjénél még y_2-vel feljebb ütközik majd az eltérítő lemezek szélétől L távolságra lévő ernyőbe. Könnyen belátható, hogy

$$tg\alpha = \frac{v_{y,max}}{v_x} = \frac{y_{2,max}}{L}$$

ahonnan

$$y_{2,max} = L \cdot tg\alpha = L \cdot \frac{v_{y,max}}{v_x} = 0{,}25\, m \cdot 0{,}04714 = 1{,}1785 \cdot 10^{-2}\, m = 11{,}785\, mm$$

Az elektronok becsapódási pontja tehát az ernyő középpontjától összességében

$$y_{1,max} + y_{2,max} = 1{,}1785 \cdot 10^{-3}\, m + 1{,}1785 \cdot 10^{-2}\, m = 1{,}2964 \cdot 10^{-2}\, m \approx 12{,}96\, mm$$

távolsággal kerülhet feljebb, illetve lejjebb. Ez azt jelenti, hogy az ernyőn kialakuló, zöldesen fluoreszkáló szakasz hossza

$$D = 2 \cdot (y_{1,max} + y_{2,max}) = 2 \cdot \left(\frac{l^2 \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot d \cdot U_{gyorsító}} + L \cdot \frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot d \cdot U_{gyorsító}} \right)$$
$$= \frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{d \cdot U_{gyorsító}} \cdot \left(\frac{l}{2} + L \right)$$

azaz

$$D = 2{,}5927 \cdot 10^{-2}\, m \approx 26\, mm$$

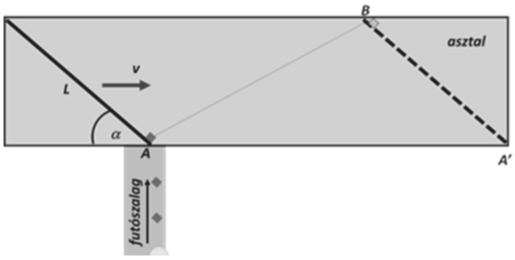
(Mivel a cső sugara 4 cm, ez a szakasz teljes egészében látható a „képernyőn”. Az eredmények kerekítések miatt kissé eltérhetnek a megadottaktól.)

8 pont

4. feladat: Gyártósor futószalagján az osztályozó asztal *A* pontjába érkező, hibátlan késztermék a vízszintes felületet *v*=6 cm/s nagyságú sebességgel végigsöprő, az asztal *AA'* szélével állandó α=50°-os szöget bezáró, *L*=50 cm hosszúságú terelőrúd mentén elcsúszva Δt=15 s alatt a *B* pontba jut.

a) Mekkora a terelőrúd és a termék közötti súrlódás együtthatója, ha a termék egyenletesen mozogva teszi meg az *AB* távolságot?

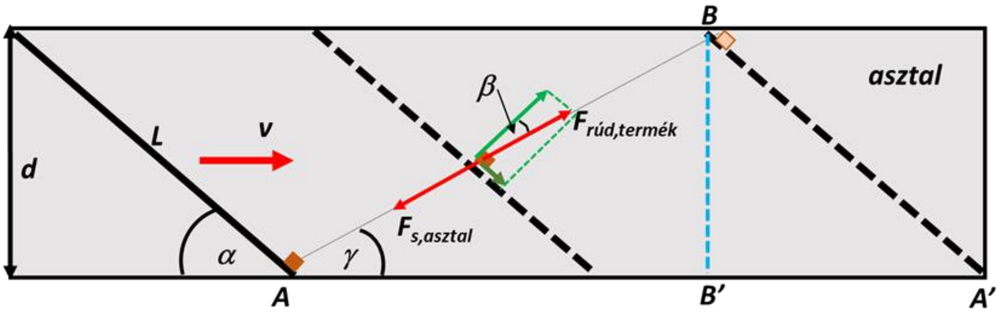
b) Mekkora a terelőrúd és a 250 gramm tömegű termék súrlódása miatt fejlődő hőmennyiség, ha az asztallap és a termék között a súrlódási együttható 0,05 nagyságú?



A termék méretei elmozdulásához viszonyítva elhanyagolhatók. A nehézségi gyorsulás értékét vedd 10 $\mathrm{m/s^2}$-nek!

Válasz:

a)



Mozgás közben a termékre a nehézségi erőn kívül a terelőrúd és az asztallap által kifejtett erő hat, utóbbi kettő felbontható a felületre merőleges, illetve azzal párhuzamos nyomó- és súrlódási komponensre. Az asztallap síkjára merőleges, azaz függőleges irányú nehézségi erő egyenlő nagyságú, ellentétes irányú az asztallap által a termékre kifejtett erő nyomó komponensével, így ezek eredője zérus:

$$N_{asztal} = m \cdot g$$

A termék egyenletesen mozog, ezért az asztallap által a termékre kifejtett erő súrlódási komponensének egyenlő nagyságúnak és ellentétes irányúnak kell lennie a terelőrúd által a termékre kifejtett erővel:

$$F_{s,asztal} = F_{rúd,termék}$$

Mivel az asztal által kifejtett súrlódási erőnek a termék asztallaphoz viszonyított, *A* felől *B* felé irányuló sebességével szemben kell mutatnia, szükségszerűen a rúd által kifejtett erő hatásvonala is az *AB* szakasz egyenesébe esik, és a *B* pont felé irányul.

A rúd által a termékre kifejtett erő a rúddal párhuzamos súrlódási, illetve a rúdra merőleges nyomókomponensre bontható. Ezek között ismert kapcsolat áll fenn:

$$\left.\begin{aligned} F_{rúd,termék} \cdot sin\beta &= F_{s,rúd} \\ F_{rúd,termék} \cdot cos\beta &= F_{ny,rúd} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{F_{s,rúd}}{F_{ny,rúd}} = \mu_1 = tg\beta$$

ahol β a rúd által a termékre kifejtett erőnek a terelőrúd normálisával bezárt szöge, μ_1 pedig a terelőrúd és a termék közötti súrlódás együtthatója.

Az ábráról leolvasható, hogy a termék felülethez viszonyított sebessége az asztal *AA'* szélével

$$\gamma = 90° - \beta - \alpha$$

nagyságú szöget zár be. Figyelembe véve, hogy a terelőrúd *AA'* elmozdulása

$$s_{AA'} = v \cdot \Delta t = 0{,}06\ \frac{m}{s} \cdot 15\ s = 0{,}9\ m$$

az asztal szélessége

$$d = L \cdot sin\alpha = 0{,}383\ m$$

az *AB'* távolság pedig

$$s_{AB'} = s_{AA'} - L \cdot cos\alpha = v \cdot \Delta t - L \cdot cos\alpha = 0{,}9\ m - 0{,}3214\ m = 0{,}5786\ m$$

felírhatjuk, hogy

$$tg\gamma = tg(90° - \beta - \alpha) = \frac{d}{s_{AB'}} = \frac{L \cdot sin\alpha}{v \cdot \Delta t - L \cdot cos\alpha} = 0{,}6619$$

Innen

$$\gamma = 33{,}5° \qquad \rightarrow \qquad \beta = 90° - \gamma - \alpha = 6{,}5°$$

azaz

$$\mu_1 = tg\beta \approx 0{,}114$$

(A γ szög meghatározásához a termék AB elmozdulásának koszinusz tétellel történő meghatározását követően szinusztétellel is eljuthatunk:

$$s_{AB}^2 = L^2 + s_{AA'}^2 - 2 \cdot L \cdot s_{AA'} \cdot cos\alpha$$

ahonnan

$$s_{AB} = 0{,}6939\ m$$

és

$$\frac{sin\gamma}{sin\alpha} = \frac{L}{s_{AB}}$$

miatt

$$sin\gamma = \frac{L \cdot sin\alpha}{s_{AB}} = 0{,}5519$$

azaz

$$\gamma = 33{,}5°$$

ugyanúgy, mint fentebb.)

12 pont

b) A termék egyenletesen mozog, ezért

$$F_{s,asztal} = F_{rúd,termék}$$

azaz

$$\mu_2 \cdot N_{asztal} = F_{rúd,termék} \ \rightarrow\ \mu_2 \cdot m \cdot g = F_{rúd,termék}$$

ahol μ_2 az asztallap és a termék között fellépő súrlódási együttható.
A terelőrúd és a termék között fellépő súrlódási erő

$$F_{s,rúd} = F_{rúd,termék} \cdot sin\beta = \mu_2 \cdot m \cdot g \cdot sin\beta$$

A fejlődő hőmennyiség nagyságra nézve megegyezik a terelőrúd és a termék között fellépő súrlódási erő munkájával:

$$Q = \left|W_{F_{s,rúd}}\right| = F_{s,rúd} \cdot L = \mu_2 \cdot m \cdot g \cdot sin\beta \cdot L$$

azaz

$$Q = \mu_2 \cdot m \cdot g \cdot sin\beta \cdot L = 0{,}05 \cdot 0{,}25\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2} \cdot sin6{,}5° \ \cdot 0{,}5\ m \approx 7{,}075\ mJ$$

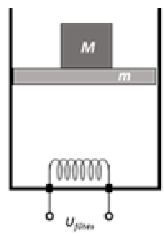
8 pont

XXVI. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2023
12. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.
Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

1. feladat: A hőszigetelő falú, 100 cm^2 keresztmetszetű hengeres edényben lévő levegő felmelegítésével a hengert lezáró, könnyen mozgó, 1 kg tömegű, ugyancsak hőszigetelő anyagú dugattyú, és a rá helyezett 19 kg tömegű test felemelhető. Amikor a beépített fűtőszál a bezárt levegőnek 1750 J hőmennyiséget ad át, a dugattyú a ráhelyezett teherrel együtt 40 cm-rel feljebb emelkedik. Mekkora a külső légnyomás?
(A bezárt – oxigén és nitrogén keverékének tekinthető – levegőt nagyon lassan melegítették. A nehézségi gyorsulás értékét vedd 10 m/s^2-nek!)



Válasz:

A dugattyú könnyen mozog, ami azt jelenti, hogy a bezárt levegő nyomása a folyamatban mindvégig állandó:

$$p_{bezárt} = p_{lég} + \frac{(m+M)\cdot g}{A}$$

ahol $p_{lég}$ a keresett külső légnyomás, A pedig a henger keresztmetszete.
A gáz munkája a folyamatban

$$W_{gáz} = p_{bezárt}\cdot A\cdot \Delta h = p_{lég}\cdot A\cdot\Delta h + (m+M)\cdot g\cdot\Delta h$$

azaz a gáznak a dugattyú és a teher magassági energia-növekedéséhez szükséges, és a légköri nyomással szemben végzett munkát kell fedeznie.
Az I. főtétel értelmében

$$\Delta E_b = Q + W_{környezet}$$

ahonnan

$$W_{gáz} = -W_{környezet} = Q - \Delta E_b$$

ahol

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot p_{bezárt} \cdot A \cdot \Delta h = \frac{f}{2} \cdot W_{gáz}$$

illetve

$$Q = \Delta E_b + W_{gáz} = \frac{f+2}{2} \cdot W_{gáz}$$

Kihasználva, hogy a levegő szabadsági fokszáma f=5, kapjuk, hogy

$$W_{gáz} = \frac{2}{f+2} \cdot Q = \frac{2}{7} \cdot Q$$

Emiatt

$$\frac{2}{7} \cdot Q = p_{lég} \cdot A \cdot \Delta h + (m+M) \cdot g \cdot \Delta h$$

azaz

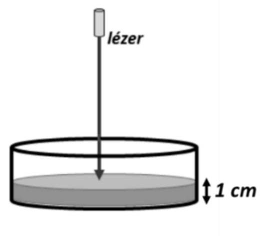
$$p_{lég} = \frac{\frac{2}{7} \cdot Q - (m+M) \cdot g \cdot \Delta h}{A \cdot \Delta h} = \frac{2 \cdot Q}{7 \cdot A \cdot \Delta h} - \frac{(m+M) \cdot g}{A}$$

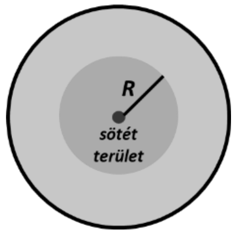
$$p_{lég} = \frac{2 \cdot 1750\, J}{7 \cdot 10^{-2} m^2 \cdot 0{,}4\, m} - \frac{(1+19) kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}}{10^{-2} m^2} = 1{,}05 \cdot 10^5\, Pa$$

a külső légnyomás nagysága.

20 pont

2. feladat: Egy homokfúvott, matt, szemcsés belső felületű hengeres üvegedénybe 1 cm vastagságban vizet töltöttünk. Keskeny, vörös színű lézerfény-nyalábot irányítva merőlegesen a vízfelület középpontjába, az edény fenekén – a mellékelt felülnézeti ábrának megfelelően – a megvilágított fényes pont körül egy sötét kört figyeltünk meg, azon túl viszont az edény aljának többi részét is halvány vörös fény világította meg. Mekkora volt a sötétén maradt terület sugara, ha a víz törésmutatója 1,33?



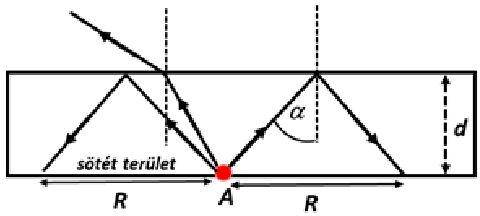


felülnézet

Válasz:

Az edény matt felületére érkező fény minden irányban szóródik, ezért úgy foghatjuk fel a szituációt, mintha az edény fenekén egy pontszerű fényforrás lenne a lézernyaláb *A* beesési pontjában.

Az *A* pontból kiinduló fénysugarak akkor tudnak kilépni a vízből, ha a víz felszínére a teljes visszaverődés határszögénél kisebb szögben érkeznek, azaz, ha



$$\alpha < \alpha_H$$

ahol

$$sin\alpha_H = \frac{1}{n_{víz}} \rightarrow \alpha_H = 48{,}75°$$

A határszögben, vagy annál nagyobb beesési szögben érkező fénysugarak a vízfelületen teljes visszaverődést szenvedve visszajutnak az edény fenekére: ez a fény eredményezi az edény fenekén a sötét régión túl megfigyelhető halvány megvilágítást. Az ábra alapján látható, hogy az

$$\alpha = \alpha_H$$

határesetet vizsgálva megkaphatjuk a megvilágítás nélkül maradt körlap *R* sugarát. A vízréteg *d* vastagságának felhasználásával

$$tg\alpha_H = \frac{R}{2 \cdot d} \rightarrow R = 2 \cdot d \cdot tg\alpha_H$$

azaz

$$R = 2 \cdot 1\ cm \cdot tg48{,}75° = 2{,}28\ cm$$

20 pont

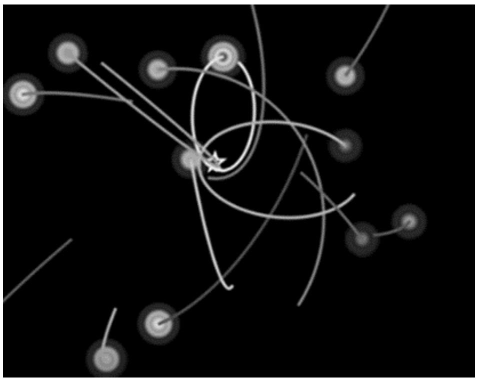
(A teljes visszaverődés határszögének kiszámítása nélkül:

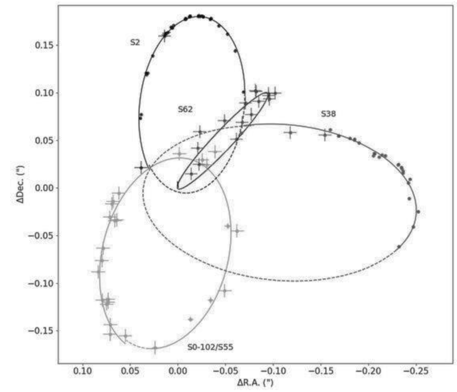
$$(sin\alpha_H =)\frac{1}{n_{víz}} = \frac{R}{2 \cdot \sqrt{\frac{R^2}{4} + d^2}}$$

$$R = \sqrt{\frac{4 \cdot d^2}{n_{víz}^2 - 1}} = \frac{2 \cdot d}{\sqrt{n_{víz}^2 - 1}} = 2{,}28\ cm$$

ugyanúgy, mint fentebb.)

3. feladat: A 2020-as fizikai Nobel-díjat hárman kapták, megosztva: Roger Penrose fizikus-matematikus a fekete lyukak kialakulására vonatkozó elméleti eredményeiért, Reinhard Genzel és Andrea Ghez csillagászok pedig a galaxisunk középpontjában lévő szupermasszív kompakt objektum felfedezéséért. A két csillagász több évtizedes munkával, a közeli infravörös tartományban végzett észlelések alapján igazolta, hogy a Nyilas csillagképben lévő Sgr A* intenzív rádióforrás közelében, Galaxisunk középpontjában, Napunktól mintegy 8,5 kpc távolságban egy fekete lyuk található.
A fekete lyuk természetesen közvetlenül nem látható, létezésére és jellemzőire a körülötte keringő csillagok pályájának megfigyeléséből következtettek. Mintegy 20 éven keresztül kísérték figyelemmel például az S2 jelű csillagot, és megállapították, hogy 15,2 földi év periódusidővel kering egy olyan ellipszispályán, melynek fél-nagytengelye 950 CsE (*csillagászati egység*) hosszúságú. (A mellékelt ábrák a megfigyelések eredményei alapján készültek.)





a) Milyen tömegű lehet a fekete lyuk, amely körül az S2 kering? Hány Nap-tömegnek felel meg ez az érték?
b) Az S2 2018. május 19-én haladt át pályájának a fekete lyukhoz legközelebbi, attól 123 CsE távolságban lévő pontján. A vákuumbeli fénysebesség hány százaléka volt ott az S2 sebessége?
c) Tudjuk, hogy a fekete lyuk által uralt tartományt, amelyet még a fény sem képes elhagyni, az ún. eseményhorizont határolja, melynek kiterjedését a Schwarzschild-sugár, azaz

$$R_S = \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{c^2}$$

adja meg, ahol c a vákuumbeli fénysebesség, M a fekete lyuk tömege. A Schwarzschild-sugár hányszorosa volt az S2 és a központi fekete lyuk között mérhető legkisebb távolság?

Felhasználhatod, hogy 1 pc (*parsec*) =3,26 fényév =$3{,}0856 \cdot 10^{13}$ km =206 264 CsE.
A Nap tömege $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg, a gravitációs állandó $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$.
(A Függvénytáblázatban található képletekbe történő egyszerű behelyettesítés nem tekinthető teljes értékű megoldásnak!)

Válasz:

a) Kepler harmadik törvénye kimondja, hogy a Nap körül keringő bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint ellipszispályáik fél nagytengelyeinek köbei. Tudjuk, hogy a törvény általánosítható, azaz tetszőleges központi gravitációs vonzócentrum körül keringő testek megfelelő pályaadataira nézve érvényes, hogy

$$\frac{T^2}{a^3} = konstans$$

ahol a konstans értéke függ a központi égitest tömegétől. A konstans értékének pontos alakját például a következő gondolatmenettel kaphatjuk meg.
Tudjuk, hogy a kör egy speciális ellipszis, amelynek fókuszpontjai egybeesnek (excentricitása 0), a fél-nagytengelye pedig a sugár:

$$r = a_{kör}$$

Tekintsünk egy, az *M* tömegű központi vonzócentrum körül *r* sugarú körpályán keringő *m* tömegű testet, és tegyük fel, hogy

$$M \gg m$$

azaz a közös tömegközéppont *M*-be esik!
A körpályán mozgó testre a mozgásegyenletet felírva

$$\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot r \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_{kör}}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \gamma \cdot \frac{M}{r^2} = r \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_{kör}}\right)^2$$

azaz

$$\frac{T_{kör}^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M} = konstans$$

Ha ugyanezen centrum körül *a* fél-nagytengelyű ellipszispályán keringő testet képzelünk el, arra Kepler törvénye értelmében a konstansnak ugyanekkorának kell lennie, azaz

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{kör}^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M}$$

Az S2 pályaadatait, és a kapott

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M}$$

összefüggést felhasználva a fekete lyuk tömege már meghatározható.
Az adatokat fejezzük ki az SI alapmennyiségeivel!

$$T = 15{,}2\ földi\ év = 15{,}2 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\ s = 4{,}7968 \cdot 10^8\ s \approx 4{,}8 \cdot 10^8\ s$$

A mértékegységek között megadott összefüggésekből kapható, hogy

$$1\ CsE = \frac{3{,}0856 \cdot 10^{13}\ km}{206\,264} = 1{,}49595 \cdot 10^8\ km = 1{,}49595 \cdot 10^{11}\ m$$

ezért

$$a = 950\ \text{CsE} = 950 \cdot 1{,}49595 \cdot 10^{11}\ m \approx 1{,}421 \cdot 10^{14}\ m$$

Így a fekete lyuk tömegére adódik, hogy

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^3}{\gamma \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1{,}421 \cdot 10^{14}\ m)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot (4{,}8 \cdot 10^8\ s)^2} = \frac{1{,}133 \cdot 10^{44}}{1{,}5368 \cdot 10^7} kg \approx 7{,}37 \cdot 10^{36}\ kg$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{M}{M_{Nap}} \approx 3{,}7 \cdot 10^6$$

azaz a fekete lyuk tömege körülbelül 3,7 millió Nap tömegével egyezik meg.

8 pont

b) Az ellipszispályán keringő test összes mechanikai energiája:

$$E_{össz} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

A mechanikai energia megmaradása miatt a nagytengely két végpontjában felvett sebességekre teljesül, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_p^2-\gamma\cdot\frac{m\cdot M}{r_p}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_a^2-\gamma\cdot\frac{m\cdot M}{r_a}$$

ahol r_a és r_p a pálya nagytengelye két végpontjának távolsága a vonzócentrumtól (apoapszis, periapszis), v_a és v_p pedig a keringő test sebessége ezekben a pontokban.
Természetesen

$$r_a+r_p=2\cdot a$$

A területi sebesség állandósága (illetve a pályaperdület megmaradása) miatt

$$\frac{r_p\cdot v_p\cdot\Delta t}{2\cdot\Delta t}=\frac{r_a\cdot v_a\cdot\Delta t}{2\cdot\Delta t}\ \rightarrow\ r_p\cdot v_p=r_a\cdot v_a$$

mivel ezekben a pontokban a sebesség merőleges a vonzócentrumtól húzott vezéregyenesre.
Ezeket felhasználva a test periapszisban felvett sebességét már meghatározhatjuk:

$$v_p^2-2\cdot\gamma\cdot\frac{M}{r_p}=v_a^2-2\cdot\gamma\cdot\frac{M}{r_a}\ \rightarrow\ v_p^2-v_a^2=2\cdot\gamma\cdot M\cdot\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_a}\right)$$

$$v_p^2\cdot\left(1-\frac{r_p^2}{r_a^2}\right)=2\cdot\gamma\cdot M\cdot\frac{r_a-r_p}{r_a\cdot r_p}\ \rightarrow\ v_p^2\cdot\left(r_a^2-r_p^2\right)=2\cdot\gamma\cdot M\cdot\frac{r_a\cdot(r_a-r_p)}{r_p}$$

$$v_p^2\cdot\left(r_a+r_p\right)=2\cdot\gamma\cdot M\cdot\frac{r_a}{r_p}\ \rightarrow\ v_p^2\cdot 2\cdot a=2\cdot\gamma\cdot M\cdot\frac{2\cdot a-r_p}{r_p}$$

$$v_p^2=\frac{\gamma\cdot M}{a}\cdot\frac{2\cdot a-r_p}{r_p}\ \rightarrow\ v_p=\sqrt{\gamma\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r_p}-\frac{1}{a}\right)}$$

Mivel

$$r_p=123\ CsE=123\cdot 1{,}49595\cdot 10^{11}\ m\approx 1{,}84\cdot 10^{13}\ m$$

behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$v_p=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 7{,}37\cdot 10^{36}\ kg\cdot\left(\frac{2}{1{,}84\cdot 10^{13}\ m}-\frac{1}{1{,}421\cdot 10^{14}\ m}\right)}$$

$$v_p=\sqrt{4{,}916\cdot 10^{26}\ \cdot 1{,}0166\cdot 10^{-13}\frac{m^2}{s^2}}=\sqrt{4{,}9975\cdot 10^{13}\frac{m^2}{s^2}}\approx 7{,}1\cdot 10^6\ \frac{m}{s}$$

azaz az S2 periapszisban felvett sebessége a vákuumbeli fénysebességnek

$$\frac{v_p}{c}=\frac{7{,}1\cdot 10^6\ \frac{m}{s}}{3\cdot 10^8\frac{m}{s}}\approx 0{,}024$$

körülbelül a 2,4 %-a.

8 pont

c) A fekete lyuk tömegének ismeretében a Schwarzschild-sugár kiszámítható:

$$R_S=\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{c^2}=\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 7{,}37\cdot 10^{36}\ kg}{\left(3\cdot 10^8\frac{m}{s}\right)^2}\approx 1{,}1\cdot 10^{10}\ m$$

A periapszis távolságát felhasználva a keresett hányados:

$$\frac{r_p}{R_S}=\frac{1{,}84\cdot 10^{13}\ m}{1{,}1\cdot 10^{10}\ m}\approx 1684$$

Azaz a Schwarzschild-sugár mintegy 1700-szorosának megfelelő távolságban haladt el az S2 a fekete lyuk mellett, amikor legközelebb járt hozzá a pályáján, így érthető, hogy nem zuhan a fekete lyukba.

4 pont

(A Négyjegyű függvénytáblázatban – pl. a 13129/1 kiadványban a 118. oldalon – megtalálható a Nap körül a fél-nagytengelyű ellipszispályán keringő bolygó periódusidejét, illetve az ellipszispályán keringő bolygó pillanatnyi sebességét megadó összefüggés is:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\gamma \cdot M}}$$

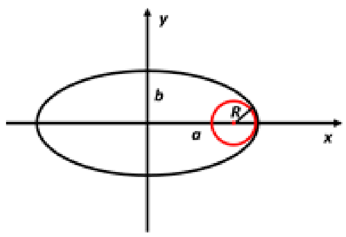
$$v_{pill} = \sqrt{\gamma \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

ahol M a Nap tömege, r a vezérsugár hossza, γ a gravitációs állandó.

Természetesen ezek használatával egyszerű behelyettesítéssel adódnak az eredmények, ez a megoldás azonban kevés szellemi erőfeszítést igényel. Bár a fentebb ismertetett elvárható gondolatmenetek speciális esetekből kiindulva vonnak le következtetéseket, és nem tekinthetők kifogástalan bizonyításnak, de középiskolás szinten elfogadhatók, és jóval több értéket hordoznak, mint a képletbe helyettesítés.

Esetlegesen előfordulhatnak a következő gondolatmenetek is, természetesen ezek is teljes értékű megoldásnak számítanak.

Határozzuk meg az ellipszis-pálya nagytengelyének végpontjához tartozó simulókör görbületi sugarát! Az ellipszispályán mozgó pontszerű test egyidejűleg két, egymástól független eredetű, azonos frekvenciájú, a illetve b amplitúdójú, 90 fokos fáziskülönbségű harmonikus rezgőmozgást végez, egymásra merőleges egyenesek mentén. (Itt a az ellipszis fél nagytengelye, b a fél kistengelye.)



Legyen a $t=0$ időpillanatban a test a $(0;b)$, a $t=T/4$ időpillanatban pedig az $(a;0)$ pontban! A koordinátákra, illetve a sebesség- és gyorsuláskomponensekre felírható, hogy

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot sin\omega t \\ y &= b \cdot cos\omega t \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} v_x &= a \cdot \omega \cdot cos\omega t \\ v_y &= b \cdot \omega \cdot sin\omega t \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} A_x &= -\omega^2 \cdot x \\ A_y &= -\omega^2 \cdot y \end{aligned}\right\}$$

Eszerint

- t=0-ban

$$\left.\begin{aligned} v_x &= a \cdot \omega \\ v_y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y &= -\omega^2 \cdot b \end{aligned}\right\}$$

- t=T/4-ben

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= b \cdot \omega \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} A_x &= -\omega^2 \cdot a \\ A_y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A görbületi sugár nagysága a normális gyorsuláskomponenssel a vizsgált pontokban

$$|A_n| = \frac{v_t^2}{R}$$

kapcsolatban áll, ezért kaphatjuk, hogy

- a kistengely végpontjában, t=0-ban

$$R_k = \frac{v_t^2}{|A_n|} = \frac{v_x^2}{|A_y|} = \frac{a^2 \cdot \omega^2}{|-\omega^2 \cdot b|} = \frac{a^2}{b}$$

- a nagytengely végpontjában, t=T/4-ben

$$R_n = \frac{v_t^2}{|A_n|} = \frac{v_y^2}{|A_x|} = \frac{b^2 \cdot \omega^2}{|-\omega^2 \cdot a|} = \frac{b^2}{a}$$

A kapott eredményt felhasználva írjuk fel az ellipszispályáján éppen a nagytengely végpontjában, a vonzócentrumhoz legközelebb eső pontban járó testre a mozgásegyenletet:

$$\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p^2} = m \cdot \frac{v_p^2}{R_n}$$

ahol r_p a pálya vonzócentrumhoz legközelebb eső pontjának a centrumtól mért távolsága (periapszis).

Felhasználva a görbületi sugárra nyert kifejezést:

$$\gamma \cdot \frac{M}{r_p^2} = a \cdot \frac{v_p^2}{b^2} \rightarrow r_p^2 \cdot v_p^2 = \frac{\gamma \cdot M \cdot b^2}{a}$$

A területi sebesség állandósága miatt (Kepler II. törvénye) a periapszisra vonatkozó adatokkal és az ellipszis terület-képletének ismeretében felírható, hogy

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r_p \cdot v_p \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta t} = \frac{r_p \cdot v_p}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{T} \rightarrow r_p \cdot v_p = 2 \cdot \frac{a \cdot b \cdot \pi}{T}$$

ahol T a test keringési ideje.

Innen adódik a Kepler-törvényben szereplő konstans értékére, hogy

$$\left(2 \cdot \frac{a \cdot b \cdot \pi}{T}\right)^2 = \frac{\gamma \cdot M \cdot b^2}{a}$$

azaz

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{kör}^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M}$$

vagyis ugyanaz a kifejezés, mint a fentiekben.

A periapszisban felvett sebességre nézve is végigvihető a fentiekben ismertetett helyett egy másik gondolatmenet is.

Az ellipszispályán keringő test összes mechanikai energiája a nagytengely vonzócentrumhoz közeli végpontjában

$$E_{össz} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_p^2 - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p}$$

A területi sebesség állandósága miatt

$$\frac{r_p \cdot v_p}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{T}$$

továbbá beláttuk, hogy Kepler III. törvényéből adódik a

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot M}$$

összefüggés. Ezeket felhasználva

$$E_{össz} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \pi^2}{r_p^2 \cdot T^2} - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} = m \cdot \frac{2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot \pi^2 \cdot \gamma \cdot M}{r_p^2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot a^3} - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p}$$

$$E_{össz} = m \cdot \frac{b^2 \cdot \gamma \cdot M}{2 \cdot r_p^2 \cdot a} - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} \cdot \left(\frac{b^2}{2 \cdot r_p \cdot a} - 1\right) = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} \cdot \frac{b^2 - 2 \cdot r_p \cdot a}{2 \cdot r_p \cdot a}$$

Az ellipszis tulajdonságaiból következik, hogy

$$b^2 = a^2 - c^2 = (a - c) \cdot (a + c)$$

ahol

$$c = a - r_p$$

a két fókuszpont távolságának fele (lineáris excentricitás).
Emiatt az összenergia kifejezése tovább alakítható:

$$E_{össz} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} \cdot \frac{b^2 - 2 \cdot r_p \cdot a}{2 \cdot r_p \cdot a} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} \cdot \frac{a^2 - c^2 - 2 \cdot (a - c) \cdot a}{2 \cdot (a - c) \cdot a}$$

$$E_{össz} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} \cdot \frac{(a - c) \cdot (a + c - 2 \cdot a)}{2 \cdot (a - c) \cdot a} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} \cdot \frac{(c - a)}{2 \cdot a} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} \cdot \frac{(-r_p)}{2 \cdot a}$$

vagyis

$$E_{össz} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{2 \cdot a}$$

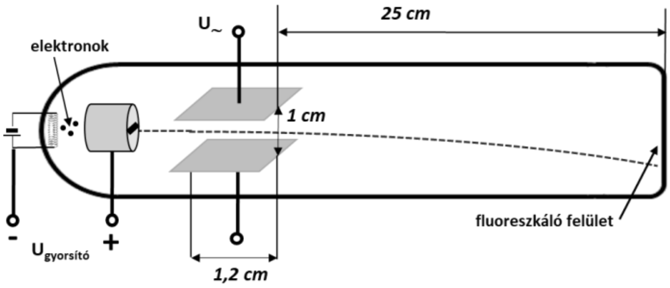
Eszerint az ellipszispályán keringő test összenergiáját az ellipszis fél-nagytengelyének hossza meghatározza.
Ennek az ismeretnek a birtokában az S2 periapszisban felvett sebessége meghatározható:

$$(E_{össz} =) \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_p^2 - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r_p} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{2 \cdot a}$$

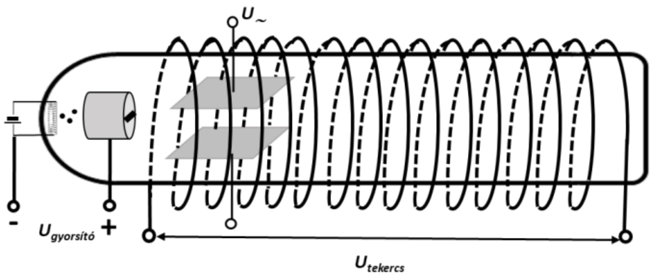
$$v_p = \sqrt{\gamma \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)}$$

ugyanúgy, mint a fentiekben vázolt megoldásban.)

4. feladat: Vákuumcső izzókatódjából kilépő, majd 1000 V feszültséggel vízszintes irányú sebességre gyorsított elektronok keskeny nyalábja vízszintes helyzetű, egymástól 1 cm távolságban lévő, 1,2 cm hosszúságú alumíniumlemezek által alkotott síkkondenzátor fegyverzetei közé lép, a lemezeket elválasztó távolság felének magasságában. A kondenzátorlemezekre 20 V effektív értékű, szinuszosan váltakozó feszültséget kapcsolnak. Ennek hatására a cső katóddal szemben lévő, fluoreszkáló festékkel bevont, gyakorlatilag síkfelületnek tekinthető, a lemezektől 25 cm távolságban lévő falán a becsapódó elektronok nyomán zöldes fényben világító egyenes szakasz rajzolódik ki.



a) Eredeti haladási irányuktól maximálisan mekkora szöggel térülnek el a kondenzátorlemezek között áthaladva az elektronok?
b) Milyen hosszú a „képernyőn” megfigyelhető, zöld színben fluoreszkáló szakasz?
c) A vákuumcsövet egy szolenoiddal körülveszik úgy, hogy a cső és a tekercs hossztengelye egybeessen. A szolenoid áramát nulláról lassan növelve a „képernyőn” kirajzolódó szakasz elfordul, hossza csökken, majd egy bizonyos áramerősség-értéket elérve egy fényes ponttá zsugorodik. Becsüld meg, mekkora ebben az állapotban a tekercs által létrehozott mágneses mező indukciójának nagysága!



Az elektron töltése $1{,}6\cdot10^{-19}$ C, tömege $9{,}1\cdot10^{-31}$ kg. A földi mágneses mező hatását, valamint a lemezpárok között kialakuló elektromos mező szóródását figyelmen kívül hagyhatod!

Válasz:

a) A munkatétel alapján

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = q\cdot U_{gyorsító}$$

ahonnan a gyorsítási szakasz végén az elektronok sebessége

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot q\cdot U_{gyorsító}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot10^{-19}\ C\cdot 1000\ V}{9{,}1\cdot10^{-31}\ kg}}=1{,}875\cdot 10^{7}\ \frac{m}{s}$$

Az eltérítő kondenzátor elektromos mezeje abban a pillanatban lesz a legerősebb, amikor a váltakozó feszültség csúcsértéke lép fel. Szinuszosan váltakozó feszültségről lévén szó, ez az érték

$$U_{max}=U_{eff}\cdot\sqrt{2}=20\ V\cdot\sqrt{2}=28{,}284\ V$$

ezért a maximális térerősség

$$E_{max} = \frac{U_{max}}{d} = \frac{28{,}284\ V}{0{,}01\ m} = 2828{,}4\ \frac{N}{C}$$

A vízszintes síkú lemezpár az elektronokat eredeti haladási irányuktól függőlegesen eltéríti, mégpedig a pillanatnyi térerősséggel ellentétes irányban. Az elektronok mozgása a lemezek közötti homogénnek tekinthető mezőben egy vízszintes irányú állandó sebességű mozgás, és egy függőleges irányú állandó gyorsulású mozgás összetételeként fogható fel.

$$\left.\begin{aligned} x &= v \cdot t \\ y &= \frac{a}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\} \ ill. \ \left.\begin{aligned} v_x &= v \\ v_y &= a \cdot t \end{aligned}\right\}$$

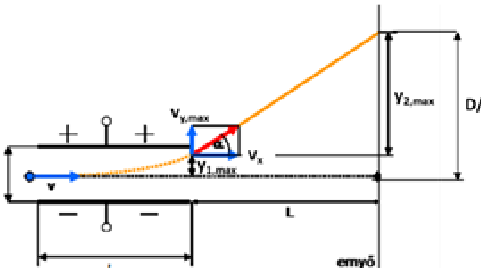
A lemezek között az elektronok gyorsulása az elektromos térerősség pillanatnyi értékétől függ, a kis tömeg miatt ugyanis a gravitációs erő hatása elhanyagolható.

$$q \cdot E = m \cdot a$$

A gyorsulás nagysága maximum

$$a = \frac{q \cdot E}{m} \rightarrow a_{max} = \frac{q \cdot E_{max}}{m} = \frac{q}{m} \cdot \frac{U_{max}}{d} = \frac{q \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{m \cdot d} = 4{,}973 \cdot 10^{14}\ \frac{m}{s^2}$$

lehet, iránya függőlegesen lefelé, vagy felfelé mutat.



Először meghatározzuk, maximálisan mennyivel kerül feljebb, illetve lejjebb egy elektron kilépési pontja a belépési pontnál, valamint hogy milyen irányú sebességgel rendelkezhet a lemezek közül történő kilépés pillanatában a részecske.

$$\left.\begin{aligned} l &= v \cdot t_{áthaladás} \\ y_{1,max} &= \frac{a_{max}}{2} \cdot t_{áthaladás}^2 \end{aligned}\right\}$$

(Részeredmény:

$$t_{áthaladás} = \frac{l}{v} = \frac{0{,}05\ m}{2{,}2967 \cdot 10^{7}\ \frac{m}{s}} = 6{,}4 \cdot 10^{-10}\ s$$

a lemezek közötti áthaladás időtartama.)

$$y_{1,max} = \frac{a_{max}}{2} \cdot \frac{l^2}{v^2} = \frac{l^2 \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot d \cdot U_{gyorsító}} = 1{,}0185 \cdot 10^{-4}\ m$$

$$y_{1,max} \approx 0{,}1\ mm$$

Tehát az elektronok a belépés szintjénél legfeljebb kb. 0,1 mm-rel feljebb, vagy lejjebb léphetnek ki a kondenzátorlemezek közül.

A lemezek közötti térből történő kilépésnél az elektron sebességkomponensei:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v \\ v_{y,max} &= a_{max} \cdot t_{áthaladás} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_{gyorsító}}{m}} = 2{,}2967 \cdot 10^{7}\ \frac{m}{s} \\ v_{y,max} &= \frac{q \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{m \cdot d} \cdot \frac{l}{v} = \frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{d} \cdot \sqrt{\frac{q}{2 \cdot m \cdot U_{gyorsító}}} \end{aligned}\right\}$$

(Részeredmény:

$$v_{y,max} = a_{max} \cdot t_{áthaladás} = 3{,}183 \cdot 10^{5}\ \frac{m}{s}$$

a függőleges irányú sebességkomponens maximuma.)
Mivel az elektron sebessége a pálya érintőjének irányában mutat, a sebességkomponensekből kiszámítható a kilépési pontban az érintő (az elektron kilépési iránya) vízszintessel bezárt maximális szöge, azaz a keresett legnagyobb szögeltérülés:

$$tg\alpha = \frac{v_{y,max}}{v_x} = \frac{\frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{d} \cdot \sqrt{\frac{q}{2 \cdot m \cdot U_{gyorsító}}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_{gyorsító}}{m}}} = \frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot d \cdot U_{gyorsító}} = 0{,}01697$$

azaz maximálisan

$$\alpha_{max} = 0{,}9722° \approx 1°$$

szöggel térülnek el az elektronok eredeti haladási irányuktól.

8 pont

b) A lemezek közti tér elhagyása után az elektron az ernyőig egyenes pályán mozog a kilépés pillanatában meglévő sebességével. A kilépési pont szintjénél még y_2-vel feljebb ütközik majd az eltérítő lemezek szélétől L távolságra lévő ernyőbe. Könnyen belátható, hogy

$$tg\alpha = \frac{v_{y,max}}{v_x} = \frac{y_{2,max}}{L}$$

ahonnan

$$y_{2,max} = L \cdot tg\alpha = L \cdot \frac{v_{y,max}}{v_x} = 0{,}25\, m \cdot 0{,}01697 = 4{,}243 \cdot 10^{-3}\, m = 4{,}243\, mm$$

Az elektronok becsapódási pontja tehát az ernyő középpontjától összességében

$$y_{1,max} + y_{2,max} = 1{,}0185 \cdot 10^{-4}\, m + 4{,}243 \cdot 10^{-3}\, m = 4{,}3445 \cdot 10^{-3}\, m \approx 4{,}3445\, mm$$

távolsággal kerülhet feljebb, illetve lejjebb. Ez azt jelenti, hogy az ernyőn kialakuló, zöldesen fluoreszkáló szakasz hossza

$$D = 2 \cdot (y_{1,max} + y_{2,max}) = 2 \cdot \left(\frac{l^2 \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot d \cdot U_{gyorsító}} + L \cdot \frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot d \cdot U_{gyorsító}}\right)$$

$$= \frac{l \cdot U_{eff} \cdot \sqrt{2}}{d \cdot U_{gyorsító}} \cdot \left(\frac{l}{2} + L\right)$$

azaz

$$D = 8{,}689 \cdot 10^{-3}\, m \approx 8{,}7\, mm$$

4 pont

c) A szolenoid a katódsugárcső tengelyével párhuzamos indukcióvonalakkal jellemezhető mágneses teret hoz létre, melynek indukciója a tekercsben folyó áram erősségétől függ:

$$B \sim I_{tekercs}$$

Ebben a mágneses mezőben az indukcióvonalakkal (illetve a cső hossztengelyével) párhuzamosan mozgó elektronokra nem hatna erő, viszont a kondenzátor elektromos mezejében fellépő kis szögű eltérülések miatt az elektronok sebessége már nem lesz párhuzamos az indukcióvonalakkal, emiatt csavarvonal alakú pályára lépnek. Mozgásuk a cső hossztengelyével párhuzamos irányú, állandó sebességű mozgás, és egy erre az irányra merőleges síkban történő egyenletes körmozgás szuperpozíciójaként fogható fel. A cső hossztengelyére merőleges síkban végbemenő körmozgás periódusideje a mozgásegyenlet felírásából megkapható, ugyanis

$$q \cdot v_y \cdot B = m \cdot \frac{v_y^2}{R}$$

ahol *R* a körpálya sugara. Innen

$$R = \frac{m \cdot v_y}{q \cdot B} \;\rightarrow\; T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v_y} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B}$$

Ennyi idő alatt a mágneses mező indukcióvonalaival – illetve a cső hossztengelyével – párhuzamos irányban megtett út (a „menetemelkedés″)

$$x_m = v_x \cdot T = v_x \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B}$$

ahol

$$v_x = v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_{gyorsító}}{m}}$$

Az előző kérdések megválaszolásánál azt kaptuk, hogy a kondenzátorlemezek között áthaladva az elektronok csak kis szögű eltérüléseket szenvednek, a kondenzátorlemezek közül történő kilépés a belépés szintjénél maximum

$$y_{1,max} \approx 0{,}1\ mm$$

távolsággal feljebb, illetve lejjebb következhet be. Nem követünk el nagy hibát, ha úgy tekintjük, mintha az elektronok a kondenzátorlemezek között történő áthaladás közben még a mágneses indukcióvonalakkal párhuzamos sebességgel rendelkeznének, és csak a kondenzátorlemezek végénél a cső hossztengelyére eső pontból indulnának indukcióvonalakra merőleges sebességkomponensekkel, különböző (kicsi) szögek alatt. Ebben a megközelítésben a mágneses mező hatása alatt létrejövő csavarvonal-pályán a cső tengelyével párhuzamosan minden elektronnak

$$s_x \approx l = 0{,}25\ m$$

távolságot kell megtennie ahhoz, hogy a fluoreszkáló felületbe csapódjon.
Ha ez a távolság a menetemelkedés egész számú többszöröse, azaz

$$s_x = n \cdot x_m = n \cdot v_x \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} (\approx l)$$

$(n \in Z)$, akkor az elektronok a csövet lezáró fal középpontjában csapódnak a felületbe.
Láthatóan ez a feltétel a $\boldsymbol{B}$ indukcióvektor nagyságának csak meghatározott értékei esetén teljesülhet. Mivel a tekercs áramerősségét nulláról indulva növelték az első észlelésig, *n*=1 esetében a fényes pont (folt) kialakulásához szükséges indukció-nagyság:

$$s_x = 1 \cdot v_x \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B_1} \;\rightarrow\; B_1 = v_x \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot s_x}$$

azaz

$$B_1 = v \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot s_x} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U_{gyorsító}}{m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot U_{gyorsító}}{q \cdot l^2}}$$

$$B_1 \approx \sqrt{\frac{8 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot U_{gyorsító}}{q \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9{,}8696 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 1000\ V}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot (0{,}25\ m)^2}} = 2{,}68 \cdot 10^{-3}\ T$$

Tehát körülbelül 2,7 mT lehet a mágneses indukció nagysága, amikor a fluoreszkáló ernyőn az egyenes szakasz ponttá zsugorodik.
(A feladatban szereplő mérési eljárást használta *Hans Walter Hugo Busch* az elektron fajlagos töltésének meghatározására.)

8 pont