XXV. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2022
8. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.
Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

---

1. feladat: Amikor az arany és réz ötvözetéből készült 15,3 gramm tömegű ékszert egy mérőhengerben lévő vízbe dobjuk, a vízszint emelkedése 0,9 ml térfogatnövekedésről árulkodik. Számítsd ki, hány gramm aranyat tartalmaz az ékszer! Az arany és a réz egybeolvasztása során nem lépett fel térfogatváltozás. Az arany sűrűsége 19300 kg/m^3, a rézé pedig 8900 kg/m^3. Eredményedet egy tizedesjegyre kerekítsd!

Válasz:

Az ötvözet térfogata megegyezik a kiszorított víz térfogatával, azaz 0,9 milliliterrel. Így az ékszer átlagsűrűsége

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{15{,}3\ g}{0{,}9\ cm^3} = 17\ \frac{g}{cm^3}$$

A térfogatok összefüggése

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m_{Au}}{\rho_{Au}} + \frac{m - m_{Au}}{\rho_{Cu}}$$

ahonnan az arany tömege kifejezhető:

$$m \cdot \rho_{Au} \cdot \rho_{Cu} = m_{Au} \cdot \rho \cdot \rho_{Cu} + m \cdot \rho_{Au} \cdot \rho - m_{Au} \cdot \rho_{Au} \cdot \rho$$

$$m \cdot \rho_{Au} \cdot (\rho_{Cu} - \rho) = m_{Au} \cdot \rho \cdot (\rho_{Cu} - \rho_{Au})$$

$$m_{Au} = \frac{m \cdot \rho_{Au} \cdot (\rho_{Cu} - \rho)}{\rho \cdot (\rho_{Cu} - \rho_{Au})} = \frac{15{,}3 \cdot 19{,}3 \cdot (8{,}9 - 17)}{17 \cdot (8{,}9 - 19{,}3)} = \frac{0{,}9 \cdot 19{,}3 \cdot 8{,}1}{10{,}4} \approx \underline{\underline{13{,}5\ g}}$$

20 pont

2. feladat: Péter a kajakjában ülve 2 óra alatt evez fel a Tisza folyásirányával szemben Szegedről Algyőig. Visszafelé, folyásirányban haladva már csak 1 órára van szüksége ugyanennek a távolságnak a megtételéhez, amennyiben a vízhez viszonyítva mindkét irányban 3 m/s nagyságú sebességgel halad.

a) Mekkora a Tisza vizének áramlási sebessége?
b) Hány kilométer hosszúságú a folyó Algyő és Szeged közötti szakasza?

Válasz:

a) A kajak parthoz viszonyított sebességének nagysága a folyón felfelé (áramlással szemben) haladásnál $v_{kajak} - v_{folyó}$, lefelé haladásnál pedig $v_{kajak} + v_{folyó}$.
Ezért

$$\left(v_{kajak} - v_{folyó}\right) \cdot t_1 = \left(v_{kajak} + v_{folyó}\right) \cdot t_2$$

Innen

$$v_{folyó} = \frac{v_{kajak} \cdot (t_1 - t_2)}{(t_1 + t_2)} = \underline{\underline{1\ \frac{m}{s}}}$$

12 pont

b) A Szeged-Algyő közötti Tisza-szakasz hossza:

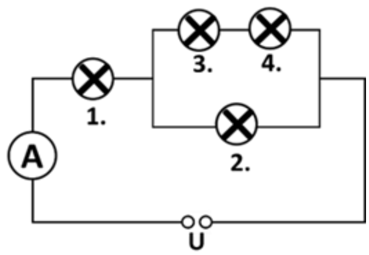
$$s = \left(v_{kajak} - v_{folyó}\right) \cdot t_1 = \left(v_{kajak} + v_{folyó}\right) \cdot t_2$$

Vagy a sebességet kell km/h mértékegységre átváltani, vagy a mozgásidőt másodpercben kifejezni. A megfelelő átváltás után például

$$s = \left(v_{kajak} - v_{folyó}\right) \cdot t_1 = \left(3\ \frac{m}{s} - 1\ \frac{m}{s}\right) \cdot 7200\ s = 14400\ m = \underline{\underline{14{,}4\ km}}$$

8 pont

3. feladat: A mellékelt ábra szerint összeállított áramkörben négy egyforma izzó, egy ideális áramerősség-mérő műszer, és egy U=12 V feszültséget szolgáltató áramforrás szerepel.



a) Melyik izzó világít a legfényesebben? Válaszodat részletesen indokold!
b) Ha a 4-es számú izzót kicsavarjuk a foglalatából, az ampermérő 600 mA erősségű áramot jelez. Mekkora áramerősséget jelzett a műszer az izzó kicsavarása előtt?
c) Hány százalékára változott az áramkör által felvett teljesítmény az izzó kicsavarásának következményeként? Eredményedet egy tizedesjegyre kerekítve add meg!

Válasz:

a) A párhuzamosan kapcsolt izzók ellenállása kisebb, mint egy izzó ellenállása. Sorosan kapcsolt fogyasztók esetében arra esik nagyobb feszültség, amelyiknek nagyobb az ellenállása. Eszerint az 1-es izzóra esik a legnagyobb feszültség. Ugyanakkor az 1-es izzón átfolyó áram a három másik izzón átfolyó áramok összege, azaz bármelyik másik izzón kisebb áramerősség folyik át, mint az 1-es jelűn. Összefoglalva: az 1-es izzóra eső feszültség és a rajta áthaladó áram erőssége a legnagyobb, így ennek az izzónak a $P=U \cdot I$ teljesítménye lesz a legnagyobb, azaz másodpercenként ez adja le a legtöbb energiát, ez világít a legfényesebben. (Természetesen az azonos ellenállást figyelembe véve a teljesítmény

$$P = \frac{U^2}{R}$$

vagy

$$P = I^2 \cdot R$$

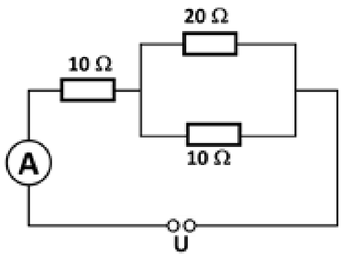
alakban történő felírását követően önmagában annak belátása, hogy az 1. izzón folyik át a legnagyobb áram, illetve, hogy arra esik a legnagyobb feszültség, már elegendő az indokláshoz.)

6 pont

b) A 4. izzó kicsavarását követően áram csak a sorba kapcsolt 1-es és 2-es izzón fog átfolyni, ezért Ohm törvénye alapján kiszámítható az eredő ellenállásból egy-egy izzó ellenállása is:

$$R_{eredő,utána} = 2 \cdot R = \frac{U}{I_{utána}} \rightarrow R = \frac{U}{2 \cdot I_{utána}} = \frac{12\,V}{2 \cdot 0{,}6\,A} = 10\,\Omega$$

Mielőtt a 4. izzót kicsavartuk volna, az áramkör egy vegyes kapcsolás volt, amit átrajzolhatunk a következőképpen:



Az eredő ellenállás ebben az esetben

$$R_{eredő,előtte} = 10\,\Omega + \frac{1}{\left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega}\right)} = 10\,\Omega + \frac{200\,\Omega}{30}$$

$$= \frac{500}{30}\Omega \approx 16{,}67\Omega$$

Az ampermérőn átfolyó áram erőssége tehát az izzó kicsavarása előtt:

$$I_{előtte} = \frac{U}{R_{eredő,előtte}} = \frac{12\,V}{\frac{500}{30}\Omega} = 0{,}72\,A = \underline{\underline{720\,mA}}$$

10 pont

c) A teljesítmény a 4. izzó kicsavarása előtt:

$$P_{előtte} = U \cdot I_{előtte} (= 12 \cdot 0{,}72 = 8{,}64\,W)$$

Az izzó kicsavarását követően a teljesítmény:

$$P_{utána} = U \cdot I_{utána} (= 12 \cdot 0{,}6 = 7{,}2\,W)$$

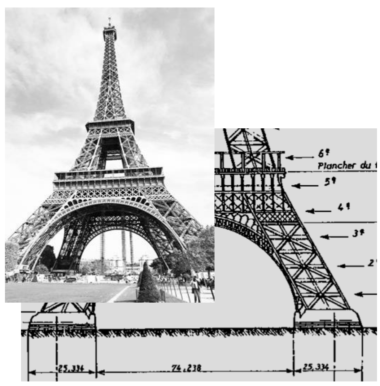
A teljesítmények aránya:

$$\frac{P_{utána}}{P_{előtte}} = \frac{U \cdot I_{utána}}{U \cdot I_{előtte}} = \frac{I_{utána}}{I_{előtte}} = \underline{\underline{0{,}833}} = \underline{\underline{83{,}3\%}}$$

Tehát az áramkör által felvett teljesítmény a 4. izzó kicsavarása miatt a 83,3%-ára csökkent.

4 pont

4. feladat: A 300 méter magas, 10100 tonna tömegű Eiffel-torony négy „lába” egy-egy 25,324 m oldalhosszúságú, négyzet alakú talapzaton nyugszik.



a) Mekkora az Eiffel-torony egy talpa alatt az építmény súlyából származó nyomás? Eredményedet kerekítsd egészekre!

b) Párizsban sokan vásárolják emléktárgyként az Eiffel-torony 15 cm magasságú kicsinyített másolatát. Ha az apró „torony” minden részletében tökéletesen hasonló lenne az eredetihez, sőt, ugyanúgy acélból készülne, mint a francia főváros nevezetessége, akkor hány gramm lenne a tömege? Eredményedet kerekítsd egy tizedesjegyre!

Válasz:

a) A torony súlya

$$G = M \cdot g = 10100000 kg \cdot 10 \frac{N}{kg} = 101000000\ N$$

A nyomott felület

$$A = 4 \cdot A_{talp} = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot (25{,}324\ m)^2 = 2565{,}22\ m^2$$

Így a talpak alatt kialakuló nyomás:

$$p = \frac{G}{A} = \frac{101000000\ N}{2565{,}22\ m^2} = 39372{,}84\ Pa \approx \underline{\underline{39373\ Pa}}$$

Másik lehetőség: a torony súlyának negyede nehezedik egy talapzatra, így

$$p = \frac{G/4}{A_{talp}}$$

ami természetesen nem különbözik az előző eredménytől.)

6 pont

b) A megoldásánál kihasználjuk, hogy a kicsinyítésnél a hasonlóság arányszáma

$$\lambda = \frac{15\ cm}{300\ m} = \frac{15\ cm}{30000\ cm} = \frac{1}{2000}$$

A hosszméretek ilyen arányban, tehát a kétezred részükre csökkennek, a térfogat és – az egyforma sűrűség miatt – a tömeg ennek köbe arányában lesznek kisebbek az eredeti torony megfelelő adatainál. Részletesebben: mivel a másolat és a torony egyforma anyagból készült, a másolat és a torony tömege közötti kapcsolat az állandó sűrűség miatt

$$(\rho =) \frac{m_m}{V_m} = \frac{M}{V}$$

ahol V_m a másolat, V a torony térfogata, m_m a másolat és M a torony tömege. Ebből adódik, hogy

$$\frac{m_m}{M} = \frac{V_m}{V} = \frac{\lambda^3 \cdot V}{V} = \lambda^3 = \frac{1}{8000000000}$$

azaz a modell tömege az Eiffel-torony tömegének 8 milliárdod része:

$$m_m = \frac{M}{8000000000} = \frac{10100000 kg}{8000000000} = 0{,}0012625\ kg = 1{,}2625\ g \approx \underline{\underline{1{,}3\ g}}$$

(Természetesen minden részletében hű modell ilyen feltételek mellett nem készíthető el a valóságban.)

14 pont

XXV. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2022
9. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.

Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

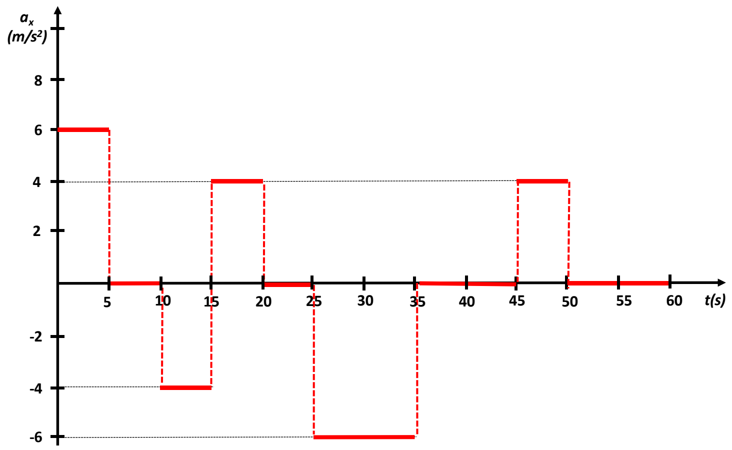
- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

1. feladat: Hosszú, egyenes tesztpályán nyugalomból induló autó gyorsulását – pontosabban annak pályamenti komponensét – az indulástól eltelt idő függvényében mutatja a mellékelt grafikon. (A járműben található gyorsulásmérő által regisztrált értékeket a vizsgálatot végző mérnökök olyan vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva ábrázolták, melynek kezdőpontját a jármű indulási helyén rögzítették, és *x* tengelyét az indulási gyorsulás vektorával megegyezően irányították.)

a) Ábrázold az autó sebességét az indulástól eltelt idő függvényében! (A szükséges számításokat jegyezd le!)

b) Mennyi ideig tart, míg az autó az indulási helyétől a legnagyobb távolságra jut, és mekkora ez a maximális távolság?

c) Milyen hosszú utat fut be, és mekkora az elmozdulása az autónak a tesztüzem 1 perces időtartama alatt



Válasz:

a) Számításokkal kövessük nyomon az egyes időintervallumokon a sebesség alakulását! Az alábbiakban szereplő előjeles sebesség-, illetve gyorsulásértékek a sebesség-, illetve gyorsulás-vektor komponensei a megadott vonatkoztatási rendszerben.

0-5 s: a sebesség az idővel egyenes arányban nő, a végsebesség

$$\vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot \Delta t \;\; \rightarrow \;\; v_1 = 0 + a_1 \cdot \Delta t_1 = 6\frac{m}{s^2} \cdot 5\, s = \underline{30\, \frac{m}{s}}$$

5-10 s: a sebesség állandó, mivel $a_2 = 0$:

$$v_2 = v_1 = \underline{30\, \frac{m}{s}}$$

10-15 s: a sebesség nagysága az idővel lineáris összefüggésben csökken, a végsebesség

$$v_3 = v_2 + a_3 \cdot \Delta t_3 = 30\, \frac{m}{s} - 4\frac{m}{s^2} \cdot 5\, s = \underline{10\, \frac{m}{s}}$$

15-20 s: a sebesség nagysága az idővel lineáris összefüggésben nő, a végsebesség

$$v_4 = v_3 + a_4 \cdot \Delta t_4 = 10\, \frac{m}{s} + 4\frac{m}{s^2} \cdot 5\, s = \underline{30\, \frac{m}{s}}$$

20-25 s: a sebesség állandó, mivel $a_5 = 0$:

$$v_5 = v_4 = \underline{30\, \frac{m}{s}}$$

25-35 s: a sebesség nagysága az idővel lineáris összefüggésben csökken, a végsebesség

$$v_6 = v_5 + a_6 \cdot \Delta t_6 = 30\, \frac{m}{s} - 6\frac{m}{s^2} \cdot 10\, s = \underline{-30\, \frac{m}{s}}$$

Ez azt jelenti, hogy az időintervallum végére az autó sebessége ellentétes irányúra változik. Számítsuk ki, mikor csökkent zérusra a sebesség, azaz melyik időpillanatban fordult meg az autó!

$$0 = v_5 + a_6 \cdot \Delta t_{fék} \rightarrow \Delta t_{fék} = -\frac{v_5}{a_6} = -\frac{30\, \frac{m}{s}}{-6\frac{m}{s^2}} = 5\, s$$

Tehát az indulástól számított 30. másodperc végén az autó sebessége irányt váltott, a jármű elkezdett közeledni a kiindulási pontja felé.

35-45 s: a sebesség állandó, mivel $a_7 = 0$:

$$v_7 = v_6 = \underline{-30\, \frac{m}{s}}$$

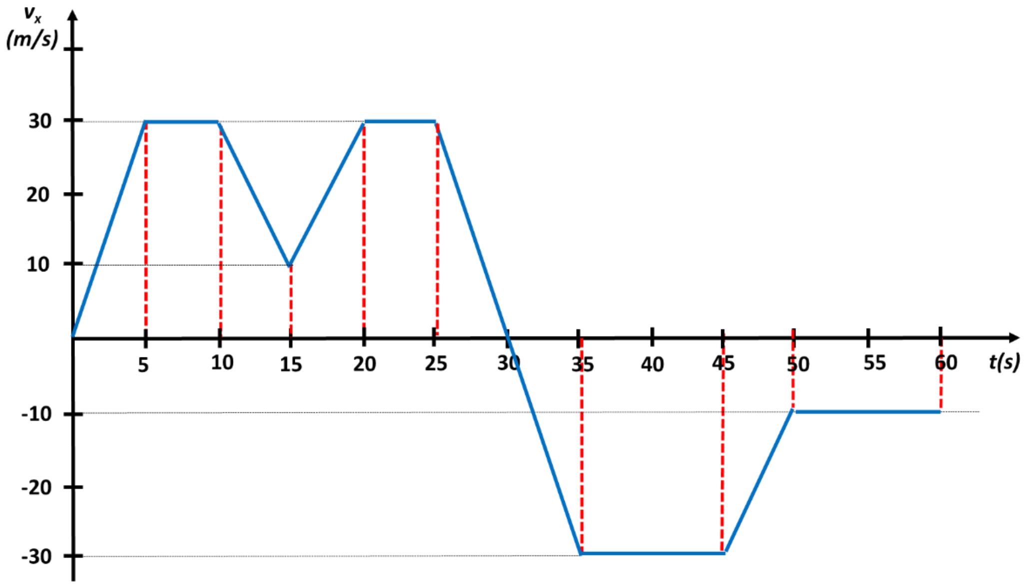
45-50 s: a sebesség nagysága az idővel lineáris összefüggésben csökken, a végsebesség

$$v_8 = v_7 + a_8 \cdot \Delta t_8 = -30\, \frac{m}{s} + 4\frac{m}{s^2} \cdot 5\, s = \underline{-10\, \frac{m}{s}}$$

50-60 s: a sebesség állandó, mivel $a_9 = 0$:

$$v_9 = v_8 = \underline{-10\, \frac{m}{s}}$$

A sebesség-idő függvény grafikonja:



10 pont

b) Az előző eredményeinkből következik, hogy az autó

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 + \Delta t_5 + \Delta t_{fék} = 25\ s + \Delta t_{fék} = \underline{\underline{30\ s}}$$

elteltével lesz legtávolabb a kiindulási helyétől. Az addig megtett útját meghatározva megkaphatjuk a keresett maximális távolságot is.
A távolodás során megtett utat ismét számíthatjuk időintervallumonként, de rövidebb, ha a sebesség-idő függvény grafikonja alatti területet számítjuk ki.
Ha a részletes számítást választjuk, akkor figyelembe kell vennünk, hogy – mivel nincs fordulat a pálya megtétele közben – az elmozdulás komponensei megadják az egyes időintervallumokban megtett utakat:

0-5 s:

$$\Delta \vec{r}_t = \vec{v}_0 \cdot \Delta t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot (\Delta t)^2 = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_t}{2} \cdot \Delta t \ \rightarrow \ \Delta s_1 = \Delta r_1 = \frac{0 + v_1}{2} \cdot \Delta t_1 = 15 \frac{m}{s} \cdot 5\ s = \underline{75\ m}$$

5-10 s:

$$\Delta s_2 = \Delta r_1 = v_2 \cdot \Delta t_2 = 30 \frac{m}{s} \cdot 5\ s = \underline{150\ m}$$

0-15 s:

$$\Delta s_3 = \Delta r_3 = \frac{v_2 + v_3}{2} \cdot \Delta t_3 = \frac{30\ \frac{m}{s} + 10 \frac{m}{s}}{2} \cdot 5\ s = \underline{100\ m}$$

15-20 s:

$$\Delta s_4 = \Delta r_4 = \frac{v_3 + v_4}{2} \cdot \Delta t_4 = \frac{10\ \frac{m}{s} + 30 \frac{m}{s}}{2} \cdot 5\ s = \underline{100\ m}$$

20-25 s:

$$\Delta s_5 = \Delta r_5 = v_5 \cdot \Delta t_5 = 30 \frac{m}{s} \cdot 5\ s = \underline{150\ m}$$

25-30 s:

$$\Delta s_{fék} = \Delta r_{fék} = \frac{v_5 + 0}{2} \cdot \Delta t_{fék} = \frac{30 \frac{m}{s} + 0}{2} \cdot 5\ s = \underline{75\ m}$$

Azaz az autó maximális eltávolodása a kiindulási ponttól

$$d_{max} = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \Delta s_4 + \Delta s_5 + \Delta s_{fék} = (75 + 150 + 100 + 100 + 150 + 75)m$$

azaz

$$d_{max} = \underline{\underline{650\ m}}$$

(Területszámítással legrövidebben: egy 30 egység hosszúságú nagy alappal és 20 egységnyi kis alappal rendelkező, 30 egység magasságú trapéz területéből ki kell vonni egy 10 egység hosszúságú alappal és 20 egységnyi alaphoz tartozó magassággal rendelkező egyenlő szárú háromszög területét:

$$T_{táv} = \frac{30+20}{2} \cdot 30 - \frac{10 \cdot 20}{2} = 750 - 100 = 650$$

azaz

$$d_{max} = \{T_{táv}\} = 650\ m$$

ahol $\{T_{táv}\}$ a sebesség-idő függvény grafikonja alatti terület számértékét jelöli.)

6 pont

c) Miután az előző pontban kiszámoltuk a távolodás során megtett utat, elegendő meghatározni, mekkora távolságot tett meg a 30. másodpercben végrehajtott fordulatot követően a kiindulási ponthoz közeledve a jármű. Ezt most csak a görbe alatti terület kiszámításával végezzük el:

$$\{T_{köz}\} = \frac{5 \cdot 30}{2} + 10 \cdot 30 + \frac{30+10}{2} \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 75 + 300 + 100 + 100 = 575$$

azaz

$$\Delta s_{köz} = \underline{575\ m}$$

Így az autó által a tesztüzem időtartama alatt megtett út

$$s_{összes} = d_{max} + \Delta s_{köz} = 650\ m + 575\ m = \underline{\underline{1225\ m}}$$

az elmozdulás pedig

$$\Delta r_{összes} = \Delta r_{max} + \Delta r_{köz} = d_{max} - \Delta s_{köz} = 650\ m - 575\ m = \underline{\underline{75\ m}}$$

4 pont

2. feladat: Statikai vizsgálatok elvégzése céljából elkészítették az Eiffel-torony minden részletében hasonló, arányaiban, sőt anyagában is tökéletesen megegyező másolatát, de míg az eredeti építmény csúcsa 300 m-rel emelkedik a talajszint fölé, a makett 3 m magasságú lett. A vízszintes felületre állított kicsinyített torony-modell négy, egyenként 6,25 dm^2 területű talpa alá egyforma mérlegeket tettek, és leolvasták, hogy azok 2,5 kg-ot mutatnak.

a) Mekkora nyomást fejt ki a modell egy-egy mérlegre?
b) Hány tonna az eredeti Eiffel-torony tömege?
c) Mekkora az eredeti Eiffel-torony egy talpa alatt az építmény súlyából származó nyomás?
A nehézségi gyorsulás értékét vegyük $10\ m/s^2$-nek!

Válasz:

A feladat megoldásánál kihasználjuk, hogy a kicsinyítésnél a hasonlóság arányszáma

$$\lambda = \frac{3\ m}{300\ m} = 0{,}01$$

A hosszméretek ilyen arányban csökkennek, a területek ennek négyzete, a térfogat és – az egyforma sűrűségből következően – a tömeg ennek köbe arányában lesznek kisebbek az eredeti torony megfelelő adatainál.

a) A makett egy talpa alatt a nyomás

$$p_m = \frac{F}{A_{m,talp}} = \frac{m_1 \cdot g}{A_{m,talp}} = \frac{25\ N}{0{,}0625\ m^2} = \underline{\underline{400\ Pa}}$$

ahol F a modell által a mérlegre kifejtett erő, m_1 a mérleg által kijelzett tömeg. (A mérleg ugyan tömeget jelez ki, de valójában a nyomóerőt méri.)

4 pont

b) Mivel a modell egyensúlyban van, a mérlegek által kifejtett nyomóerők összege egyenlő a makettra ható nehézségi erővel. A hatás-ellenhatás törvénye miatt a mérleg által kifejtett erő nagysága egyenlő a modell által a mérlegre kifejtett erő nagyságával, így

$$4 \cdot F = m_m \cdot g$$

ahol m_m a modell tömege. Innen

$$m_m = \frac{4 \cdot F}{g} = 4 \cdot m_1 = 10\ kg$$

Mivel a modell és a torony egyforma anyagból készült, a modell és a torony tömege közötti kapcsolat az állandó sűrűség miatt

$$(\rho =)\frac{m_m}{V_m} = \frac{M}{V}$$

ahol V_m a makett, V a torony térfogata, és M a torony keresett tömege. Ebből adódik, hogy

$$\frac{M}{m_m} = \frac{V}{V_m} = \frac{V}{\lambda^3 \cdot V} = \frac{1}{\lambda^3}$$

azaz az Eiffel-torony tömege a modell tömegének milliószorosa:

$$M_t = \frac{1}{\lambda^3} \cdot m_m = 1000000 \cdot m_m = \underline{\underline{10000000\ kg = 10000\ t}}$$

4 pont

c) Mivel a torony súlya/tömege a makett súlyának/tömegének milliószorosa, a nyomott felület a makett esetében vett területnek a tízezerszerese, következik, hogy a nyomás a makett talpa alatt uralkodó nyomásnak a százszorosa:

$$p_t = \frac{F_t}{A_{t,talp}} = \frac{\frac{m_1 \cdot g}{\lambda^3}}{\frac{A_{m,talp}}{\lambda^2}} = \frac{m_1 \cdot g}{\lambda \cdot A_{m,talp}} = \frac{400\ Pa}{0{,}01} = 40000\ Pa$$

Másik lehetőség: a torony már kiszámított tömegét használjuk fel a nyomás meghatározására, de ekkor a talp nagyságára is szükség van.

Az Eiffel-torony egy talpának területe a makett talp-területének tízezerszerese:

$$A_{t,talp} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot A_{m,talp} = 10000 \cdot A_{m,talp} = 625\ m^2$$

így a nyomás

$$p_t = \frac{\frac{M_t}{4} \cdot g}{A_{t,talp}} = \frac{25000000\ N}{625\ m^2} = \underline{\underline{40000\ Pa}}$$

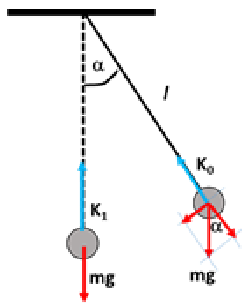
12 pont

3. feladat: A mennyezetre felfüggesztett zsinór szabad végére 2 kg tömegű ólomgolyót erősítünk, majd az így elkészített ingát a függőlegestől 30°-kal kitérítjük.

a) Mekkora erő feszíti a zsinórt a golyó elengedésének pillanatában, illetve a függőleges helyzeten történő áthaladásakor?

b) Egy másik kísérletben az ingát 60°-os szögben térítjük ki a függőlegeshez képest. Az elengedés után elszakad-e a zsinór, ha legfeljebb 35 N nagyságú erőt visel el károsodás nélkül? A nehézségi gyorsulás értékét vegyük 10 m/s^2-nek!

Válasz:



a) A golyóra mozgása során a zsinór által kifejtett K húzóerő és a nehézségi erő hat. Ezek eredője határozza meg minden pillanatban a köríven mozgó golyó gyorsulását. Mivel a golyó sebességének iránya és nagysága is változik, célszerű gyorsulását érintő irányú (pályamenti) és centripetális komponensre bontani. A kérdezett két helyzet annyiban speciális, hogy induláskor a golyó gyorsulásának nincs centripetális komponense, az egyensúlyi helyzeten történő áthaladásnál pedig az érintő irányú gyorsuláskomponens pillanatnyi értéke zérus. Az ábra alapján a két helyzetre felírhatjuk a golyó mozgásegyenletét.
Az indulás pillanatában

$$\left.\begin{aligned} m \cdot g \cdot sin\alpha &= m \cdot a_{é} \\ m \cdot g \cdot cos\alpha - K_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

azaz

$$K_0 = m \cdot g \cdot cos\alpha = m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{17{,}32\ N}}$$

(Ha a tanuló nem ismeri a szögfüggvényeket, az egyenlő oldalú háromszögről meglévő ismeretei alapján akkor is meg tudja határozni a $K_0/m \cdot g$ arányt.)
Amekkora erővel a zsinór húzza a golyót, ugyanakkora a golyó által a zsinórra kifejtett erő (Newton III.), tehát induláskor 17,32 N nagyságú erő feszíti a zsinórt.
A függőlegesen történő áthaladáskor

$$\left.\begin{aligned} a_{é} &= 0 \\ K_1 - m \cdot g &= m \cdot \frac{v^2}{l} \end{aligned}\right\}$$

innen

$$K_1 = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

A golyó sebességének négyzetét ebben a helyzetben a mechanikai energiamegmaradás törvényét alkalmazva kaphatjuk:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\alpha)$$

ahonnan

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\alpha) = 2 \cdot g \cdot l \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = g \cdot l \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Ezzel a zsinórt feszítő erő nagysága:

$$K_1 = m \cdot \left(g + \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\alpha)}{l}\right) = m \cdot \left(g + \frac{g \cdot l \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)}{l}\right)$$

$$K_1 = m \cdot g \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right) = \underline{\underline{25{,}36\ N}}$$

Tehát a függőleges helyzeten történő áthaladáskor 25,36 N nagyságú erővel húzza a golyó a zsinórt.

14 pont

b) Mivel a függőleges helyzeten történő áthaladásnál lép fel a legnagyobb zsinórt feszítő erő, kihasználhatjuk az előző pontban kapott eredményünket.

$$K_1 = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{l}\right) = m \cdot \left(g + \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\alpha)}{l}\right) = m \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot cos\alpha)$$

Amennyiben α= 60°, a húzóerő a függőleges helyzeten történő áthaladáskor

$$K_1 = m \cdot g \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot m \cdot g = \underline{40\ N\ > 35\ N = K_{max}}$$

tehát ha a függőlegestől 60°-kal térítjük ki az ingát, akkor lengése közben a zsinór el fog szakadni.

6 pont

4. feladat: Az 1,25 m magas asztal szélén kis golyó áll. Egy másik, háromszor nagyobb tömegű golyó a vízszintes asztallapon 2 m/s nagyságú állandó sebességgel közeledik az álló golyóhoz, és azzal centrálisan, tökéletesen rugalmasan ütközik.

a) Ábrázold az ütközés pillanatától az első golyó vízszintes talajra érkezéséig a két golyó között mérhető távolságot az idő függvényében! (A légellenállás elhanyagolható, a nehézségi gyorsulás értékét vegyük $10\ m/s^2$-nek.)

b) Add meg, hogy a vizsgált időintervallumban mekkora a golyók közötti legnagyobb távolság!

c) Add meg a golyók között mérhető távolságnak a kölcsönhatás pillanatától eltelt időtől való függését leíró kifejezést abban az esetben, amikor a fent leírt ütközésben azonos tömegű golyók szerepelnek! Mekkora lenne ebben az esetben a két golyó között mérhető távolság maximuma? (Vizsgálataidat most is csak az ütközés pillanatától az első golyó talajra érkezéséig eltelt időintervallumra terjeszd ki!)

Válasz:

a)-b) A rugalmas ütközés leírására a lendület és a mozgási energia megmaradásának törvényét alkalmazhatjuk:

$$\left.\begin{array}{c} 3 \cdot m \cdot v = 3 \cdot m \cdot v_1 + m \cdot v_2 \\ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} v_2 = 3 \cdot (v - v_1) \\ v_2^2 = 3 \cdot (v - v_1) \cdot (v + v_1) \end{array}\right\}$$

ahol v_1 és v_2 a nagyobb, illetve a kisebb tömegű golyó ütközés utáni sebessége.
Ebből adódik, hogy

$$9 \cdot (v - v_1)^2 = 3 \cdot (v - v_1) \cdot (v + v_1)$$

ahonnan – mivel $v \neq v_1$ – kaphatjuk, hogy

$$3 \cdot (v - v_1) = v + v_1 \ \rightarrow\ v_1 = \frac{v}{2} = 1\ \frac{m}{s}$$

és

$$v_2 = 3 \cdot (v - v_1) = \frac{3 \cdot v}{2} = 3\ \frac{m}{s}$$

Az ütközést követően mindkét golyó egy irányban, a nagyobb tömegű golyó eredeti mozgásirányában indul, az asztal széléről vízszintes hajítást szenved. Mozgásuk egy szabadesés és egy vízszintes irányú, a kezdősebességükkel történő egyenletes mozgás összetételeként fogható fel. Irányítsuk vonatkoztatási rendszerünk *y* tengelyét függőlegesen lefelé, az *x* tengelyt pedig a golyók kezdősebességének irányában, az origót helyezzük a golyók ütközési pontjába! Ekkor a golyók mozgását leíró egyenletrendszerek:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_1 \cdot t \\ y_1 &= \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\} \text{ illetve } \left.\begin{aligned} x_2 &= v_2 \cdot t \\ y_2 &= \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\}$$

Láthatóan a golyók az asztallap szintje alatt minden pillanatban egyforma mélységben tartózkodnak, csak vízszintes irányban mérve távolodnak egymástól. Távolságuk időfüggése:

$$d(t) = x_2 - x_1 = v_2 \cdot t - v_1 \cdot t = (v_2 - v_1) \cdot t = \left(\frac{3 \cdot v}{2} - \frac{v}{2}\right) \cdot t = v \cdot t$$

azaz

$$\underline{d(t) = 2\,\frac{m}{s} \cdot t}$$

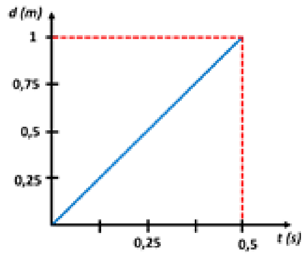
A golyók leérkezéséig eltelt idő mindkét testre nézve ugyanakkora:

$$h_{asztal} = \frac{g}{2} \cdot t_{max}^2 \;\rightarrow t_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_{asztal}}{g}} = 0{,}5\ s$$

A golyók közötti távolság az ütközés óta eltelt idővel egyenes arányban nő, legnagyobb értékét akkor veszi fel, amikor a golyók talajt érnek. Ekkor a két golyó távolsága:

$$d_{max} = d(t_{max}) = v \cdot t_{max} = 2\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}5\ s = \underline{\underline{1\ m}}$$

A golyók távolságának időfüggése grafikusan ábrázolva:



8+4 pont

c) Könnyen belátható, hogy azonos tömegű golyókat feltételezve a kezdetben mozgó golyó megáll, az eredetileg nyugvó pedig *v* sebességgel vízszintes hajítást szenved:

$$\left.\begin{aligned} m \cdot v &= m \cdot v_1 + m \cdot v_2 \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} v_2 &= v - v_1 \\ v_2^2 &= (v - v_1) \cdot (v + v_1) \end{aligned}\right\}$$

ahol v_1 és v_2 a kezdetben mozgó, illetve a kezdetben nyugvó golyó ütközés utáni sebessége. Ebből adódik, hogy

$$(v - v_1)^2 = (v - v_1) \cdot (v + v_1)$$

ahonnan – mivel $v \neq v_1$ – kaphatjuk, hogy

$$v - v_1 = v + v_1 \;\rightarrow\; v_1 = 0\,\frac{m}{s}$$

és

$$v_2 = v - v_1 = v = 2\,\frac{m}{s}$$

Az asztal szélén maradó, illetve a hajítást szenvedett golyó helykoordinátái ezt követően

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ illetve } \left.\begin{aligned} x_2 &= v_2 \cdot t \\ y_2 &= \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{aligned}\right\}$$

A golyók közötti távolságot minden pillanatban a Pitagorasz-tétellel kaphatjuk meg:

$$d^*(t) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(v_2 \cdot t)^2 + \left(\frac{g}{2} \cdot t^2\right)^2} = t \cdot \sqrt{v_2^2 + \frac{g^2}{4} \cdot t^2}$$

A keresett időfüggés tehát:

$$d^*(t) = t \cdot \sqrt{v_2^2 + \frac{g^2}{4} \cdot t^2} = \underline{\underline{t \cdot \sqrt{4\,\frac{m^2}{s^2} + 25\,\frac{m^2}{s^4} \cdot t^2}}}$$

Láthatóan a golyók távolsága ebben az esetben is növekszik az ütközéstől eltelt idő múlásával, azonban sokkal bonyolultabb az időfüggés, mint az előbb. A golyók közötti maximális távolságot viszonylag egyszerű kiszámítani, mivel a talajra érkezésig ezúttal is ugyanannyi idő telik el, mint az előbbi esetben:

$$d^*_{max} = d^*(t_{max}) = t_{max} \cdot \sqrt{v_2^2 + \frac{g^2}{4} \cdot t_{max}^2} = 0{,}5\ s \cdot \sqrt{4\ \frac{m^2}{s^2} + \frac{25}{4}\frac{m^2}{s^2}} = 0{,}5\ s \cdot \sqrt{\frac{41}{4}\frac{m^2}{s^2}}$$

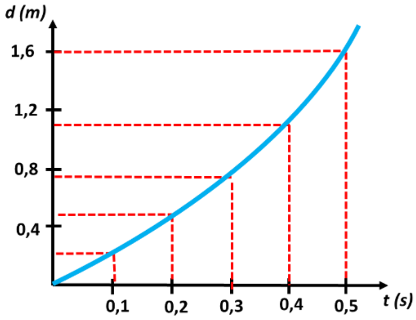
$$d^*_{max} = d^*(t_{max}) \approx \underline{\underline{1{,}6\ m}}$$

6+2 pont

(A bonyolultabb időfüggés miatt a függvény grafikonját csak néhány érték behelyettesítésével tudjuk ábrázolni:

$$d^*(t) = t \cdot \sqrt{4 + 25 \cdot t^2}$$

***t* (s)**	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
d*(m)	0,206	0,447	0,75	1,13	1,6



Ezt az ábrázolást nem várjuk el a tanulóktól.)

XXV. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2022
10. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.
Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

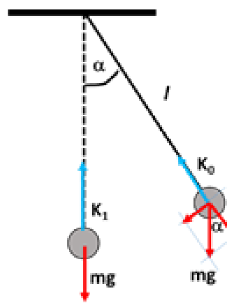
- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

---

1. feladat: A mennyezetre felfüggesztett zsinór szabad végére 2 kg tömegű ólomgolyót erősítünk, majd az így elkészített ingát a függőlegestől 30°-kal kitérítjük.
a) Mekkora erő feszíti a zsinórt a golyó elengedésének pillanatában, illetve a függőleges helyzeten történő áthaladásakor?
b) Legfeljebb mekkora szöggel téríthetjük ki a függőlegestől az ingát, ha nem szeretnénk, hogy a 35 N nagyságú erőt még károsodás nélkül elviselő zsinór elszakadjon?
A nehézségi gyorsulás értékét vegyük $10\,\mathrm{m/s^2}$-nek!

Válasz:

a) A golyóra mozgása során a zsinór által kifejtett K húzóerő és a nehézségi erő hat. Ezek eredője határozza meg minden pillanatban a köríven mozgó golyó gyorsulását. Mivel a golyó sebességének iránya és nagysága is változik, célszerű gyorsulását érintő irányú (pályamenti) és centripetális komponensre bontani. A kérdezett két helyzet annyiban speciális, hogy induláskor a golyó gyorsulásának nincs centripetális komponense, az egyensúlyi helyzeten történő áthaladásnál pedig az érintő irányú gyorsuláskomponens pillanatnyi értéke zérus. Az ábra alapján a két helyzetre felírhatjuk a golyó mozgásegyenletét.



Az indulás pillanatában

$$\left.\begin{aligned} m\cdot g\cdot sin\alpha &= m\cdot a_é \\ m\cdot g\cdot cos\alpha - K_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

azaz

$$K_0 = m\cdot g\cdot cos\alpha = m\cdot g\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{17{,}32\ N}}$$

(Ha a tanuló nem ismeri a szögfüggvényeket, az egyenlő oldalú háromszögről meglévő ismeretei alapján akkor is meg tudja határozni a $K_0/m \cdot g$ arányt.)
Amekkora erővel a zsinór húzza a golyót, ugyanakkora a golyó által a zsinórra kifejtett erő (Newton III.), tehát induláskor 17,32 N nagyságú erő feszíti a zsinórt.
A függőlegesen történő áthaladáskor

$$\left.\begin{array}{c} a_é = 0 \\ K_1 - m \cdot g = m \cdot \dfrac{v^2}{l} \end{array}\right\}$$

innen

$$K_1 = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

A golyó sebességének négyzetét ebben a helyzetben a mechanikai energiamegmaradás törvényét alkalmazva kaphatjuk:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\alpha)$$

ahonnan

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\alpha) = 2 \cdot g \cdot l \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} = g \cdot l \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Ezzel a zsinórt feszítő erő nagysága:

$$K_1 = m \cdot \left(g + \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\alpha)}{l}\right) = m \cdot \left(g + \frac{g \cdot l \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)}{l}\right)$$

$$K_1 = m \cdot g \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right) = \underline{\underline{25{,}36\ N}}$$

Tehát a függőleges helyzeten történő áthaladáskor 25,36 N nagyságú erővel húzza a golyó a zsinórt.

14 pont

b) Mivel a függőleges helyzeten történő áthaladásnál lép fel a legnagyobb zsinórt feszítő erő, kihasználhatjuk az előző pontban kapott eredményünket.

$$K_1 = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{l}\right) = m \cdot \left(g + \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - cos\alpha)}{l}\right) = m \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot cos\alpha)$$

Amennyiben $K_1 = K_{max}$ a húzóerő a függőleges helyzeten történő áthaladáskor

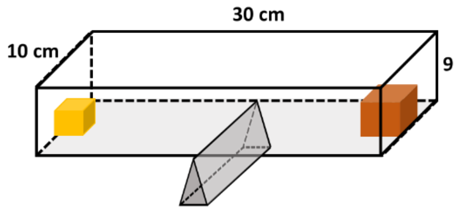
$$K_{max} = m \cdot g \cdot (3 - 2 \cdot cos\alpha) \ \rightarrow cos\alpha = \frac{3}{2} - \frac{K_{max}}{2 \cdot m \cdot g}$$

$$cos\alpha = \frac{3}{2} - \frac{7}{8} = \frac{5}{8} \ \rightarrow \ \underline{\underline{\alpha = 51{,}32°}}$$

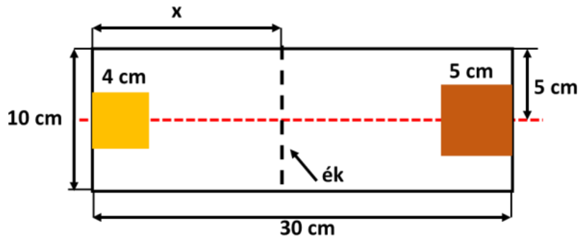
tehát legfeljebb 51,32°-kal téríthető ki az inga annak veszélye nélkül, hogy lengés közben a zsinór elszakad.

6 pont

2. feladat: Felül nyitott, 30 cm x 10 cm x 9 cm-es oldalhosszúságú, téglatest alakú, vékonyfalú edény tömege 104 gramm. Alaplapja hosszabbik középvonalának két végére, közvetlenül az edény függőleges falai mellé odatettek egy 4 cm élhosszúságú fa, illetve egy 5 cm oldalélű műanyag kockát a mellékelt ábrának megfelelően. Ezt követően az edényt egy, a 10 cm-es élekkel párhuzamos állású ékkel úgy támasztották alá, hogy vízszintes helyzetben, egyensúlyban maradjon.



térbeli nézet



felülnézet

a) Az edény bal oldali – a fa kockával érintkező – függőleges falától mérve mekkora x távolságban kellett elhelyezni az éket?
b) Ha az edényt 6 cm magasságig megtöltik vízzel, majd a két kockát eredeti helyüknél a vízbe teszik, át kell-e helyezni az éket ahhoz, hogy az egyensúly továbbra is fennálljon? Válaszodat indokold meg!
A fa sűrűsége $750\,\mathrm{kg/m^3}$, a műanyagé $384\ \mathrm{kg/m^3}$.

Válasz:

a) A két kocka tömege

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot a^3$$

alapján

$$m_{műanyag} = m_{fa} = 48\ g$$

azaz a kockák egyforma tömegűek.
Az ék helyét kétféle gondolatmenettel is megkereshetjük: vagy felírjuk az edény egyensúlyának dinamikai feltételét, vagy megkeressük a két kockából és az edényből álló rendszer tömegközéppontjának helyét. Az alábbiakban részletesen az első megoldást ismertetjük.
Írjuk fel az edényre ható erők eredőjét, és az edény bal oldali lapjának alsó élére az edényre ható erők forgatónyomatékainak összegét – egyensúly esetén mindkettőnek zérusnak kell lennie!
Az edényre hat a két kocka súlya, a nehézségi erő, és az ék nyomóereje. Minden erő függőleges hatásvonalú.

$$m_{fa} \cdot g + M_{edény} \cdot g + m_{műanyag} \cdot g - F_{ny} = 0$$

ahonnan az ék által az edény aljára kifejtett erő nagysága

$$F_{ny} = g \cdot \left(m_{fa} + M_{edény} + m_{műanyag}\right) = 10\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}2\ kg = 2\ N$$

A forgatónyomatékokra vonatkozó egyenlet:

$$m_{fa} \cdot g \cdot \frac{4\ cm}{2} + M_{edény} \cdot g \cdot 15\ cm + m_{műanyag} \cdot g \cdot \left(30\ cm - \frac{5\ cm}{2}\right) - F_{ny} \cdot x = 0$$

Innen

$$x = \frac{10\ \frac{m}{s^2} \cdot (0{,}048\ kg \cdot 2\ cm + 0{,}104\ kg \cdot 15\ cm + 0{,}048\ kg \cdot 27{,}5\ cm)}{2\ N} = \underline{\underline{14{,}88\ cm}}$$

Eszerint az éket az edény bal oldali függőleges falától mérve 14,88 cm távolságban – az edény alaplapjának rövidebb középvonalától balra 0,12 cm=1,2 mm-rel – kell elhelyezni.

10 pont

b) A kockák sűrűsége alapján nyilvánvaló, hogy mindkettő úszhat a vízen, ha ki tudnak szorítani 48 gramm tömegű, azaz 48 cm^3 térfogatú vizet, vagyis, ha a bemerülésük mélysége:

$$h_{műanyag} = \frac{48\ cm^3}{25\ cm^2} = 1{,}92\ cm$$

illetve

$$h_{fa} = \frac{48\ cm^3}{16\ cm^2} = 3\ cm$$

Mivel az edényt 6 cm magasságig töltötték meg, a kockák valóban úsznak, és mivel az általuk kiszorított 96 cm^3 víz az edényben csak

$$\Delta y = \frac{96\ cm^3}{300\ cm^2} = 0{,}32\ cm$$

azaz 3,2 mm-es vízszint-emelkedést okoz, így az edényből nem folyik ki víz a kockák vízbe helyezését követően.

Képzeletben cseréljük ki a kockákat 48 cm^3 térfogatú vízzel! Akkor az edényben csak víz lesz, emiatt az egész rendszer tömegközéppontja vízszintes irányban nézve az edény alaplapjának középpontja fölött lesz, azaz a bal oldali függőleges faltól mérve a 30 cm-es oldalhosszúság felénél, 15 cm távolságban. Ha az edény alá, a 10 cm-es élekkel párhuzamosan ide helyezzük el az éket, az edény egyensúlyban lesz. Ha most a 48 cm^3-es térrészekből „kiemeljük” a vizet, és „visszacseréljük” a kockákra, a rendszer tömegközéppontja vízszintes irányban nem mozdul el, hiszen a két kocka közös tömegközéppontjának és az általuk kiszorított víz-térfogatok közös tömegközéppontjának pl. a bal oldali faltól vízszintes irányban mért távolsága ugyanakkora, így az egyensúly fennmarad. (A kiszorított víztérfogat tömegközéppontja a kockára ható felhajtóerő támadáspontja. A kocka tömegközéppontja a rá ható nehézségi erő támadáspontja. Amikor a kocka egyensúlyi helyzetben úszik, e két pont egymás fölött van.)

Tehát, ha az edénybe vizet töltenek, majd a vízbe beteszik a kockákat, akkor annak érdekében, hogy az edény egyensúlyát biztosítani tudják, az éket az a) pontban meghatározott helyzetéből 0,12 cm-rel jobbra el kell mozdítani, azaz át kell helyezni az edény alaplapjának rövidebb középvonala alá.

10 pont

3. feladat: Könnyen mozgó dugattyúval elzárt hengerben 5 mól ideális, egyatomos gáz van. Nagyon lassú melegítés közben a gáz 1000 J munkát végez.

a) Mennyivel változott meg a folyamat során a gáz részecskéinek átlagos mozgási energiája?

b) Mekkora hőmennyiséget kellett közölni a gázzal, hogy a folyamat végbemenjen?

Az Avogadro-állandó $N_A=6\cdot10^{23}$ 1/mol.

Válasz:

a) A lassú melegítés eredményeképpen a gáz nyomása állandó marad. Az izobár folyamatban bekövetkező belső energia-változás az állapotegyenletet, valamint a belső energia és a térfogati munka kiszámítási módját felhasználva:

$$\left.\begin{aligned} p\cdot V &= n\cdot R\cdot T \\ E_b &= \frac{f}{2}\cdot n\cdot R\cdot T \\ W_{gáz} &= p\cdot \Delta V \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta E_b = \frac{f}{2}\cdot n\cdot R\cdot \Delta T = \frac{f}{2}\cdot p\cdot \Delta V = \frac{3}{2}\cdot W_{gáz} = 1500\ J$$

Itt kihasználtuk, hogy egyatomos gáz esetében a szabadsági fokok száma *f*=3.

A belső energia ideális gáz esetén a részecskék átlagos mozgási energiáinak összege, megváltozásából megkaphatjuk a kérdésre adandó választ:

$$\Delta E_b = n\cdot N_A\cdot \Delta(\varepsilon_{mozg,átlag}) \rightarrow\ n\cdot N_A\cdot \Delta(\varepsilon_{mozg,átlag}) = \frac{3}{2}\cdot W_{gáz}$$

vagyis

$$\Delta\left(\varepsilon_{mozg,átlag}\right)=\frac{\Delta E_b}{n\cdot N_A}=\frac{3}{2}\cdot\frac{W_{gáz}}{n\cdot N_A}=\underline{\underline{5\cdot 10^{-22}\,J}}$$

12 pont

b) Az I. főtételt felhasználva

$$Q=\Delta E_b+W_{gáz}=\frac{f+2}{2}\cdot p\cdot\Delta V=\frac{f+2}{2}\cdot W_{gáz}=\underline{\underline{2500\,J}}$$

8 pont

4. feladat: A Nemzetközi Űrállomáson (ISS) már számos kísérletet végeztek, melyekről a kabinban elhelyezett kamera segítségével filmfelvételeket is készítettek. Az egyik ilyen felvételen az látható, hogy egy 12 N/m rugóállandójú, deformálatlan állapotában 1 m hosszúságú gumiszállal összekötöttek két kisméretű, *m*=25 gramm illetve *M*=50 gramm tömegű golyót, majd az így elkészített elrendezést 2 1/s fordulatszámmal a kabin „légterében" forgásba hozták.
a) Milyen hosszú forgás közben a golyókat összekötő, elhanyagolható tömegű gumiszál?
b) Legfeljebb mekkora fordulatszámmal szabad megforgatni az összekötött testeket, hogy a gumiszál még biztosítani tudja a testpárnak ezt a forgómozgását?
c) A kísérletet megismételték azzal a módosítással, hogy a két golyóra egyforma nagyságú elektromos többlettöltést vittek. Ebben az esetben az előbbi módon, ismételten 2 1/s fordulatszámmal történő forgásba hozást követően a gumiszál hossza éppen 1 m nagyságú lett. Mekkora, és milyen előjelű elektromos többlettöltést vittek az egyes golyókra?
(A golyók között fellépő gravitációs erőt, és az elektromos töltések gyorsuló mozgása közben kibocsátott sugárzást elhanyagolhatjuk. A gumiszál által kifejtett erő a vizsgált deformációs tartományban egyenesen arányos a szál megnyúlásával.)

Válasz:

a) A szabadesés állapotában lévő űrállomásban készült a film, a folyamat tárgyalásához az ISS lesz a vonatkoztatási rendszerünk, azaz a súlytalanság állapotában lévő golyók körmozgását kell leírnunk.
A forgásba hozott testpárra – ebben a vonatkoztatási rendszerben! – külső erők nem hatnak, ezért tömegközéppontja nyugalomban marad. A tömegközéppont körül keringenek az egyes golyók a tömegükkel fordítottan arányos sugarú körpályán, azonos periódusidővel (fordulatszámmal), a gumiszál által kifejtett erő hatása alatt. Mivel körmozgásuk egyenletes, gyorsulásuk a tömegközéppont felé mutat, sugárirányú, centripetális.
A tömegközéppont a két golyó közötti távolságot a tömegekkel fordított arányban osztja, azaz, amennyiben a gumiszál hossza L, akkor az egyes golyók körpályáinak sugara:

$$\left.\begin{aligned} r_m+r_M&=L\\ m\cdot r_m&=M\cdot r_M\end{aligned}\right\}\rightarrow r_m=\frac{M\cdot L}{m+M}\ \text{ ill. }\ r_M=\frac{m\cdot L}{m+M}$$

Az egyes golyók mozgásegyenlete:

$$\left.\begin{aligned} D\cdot\Delta L&=m\cdot a_{cp,m}\\ D\cdot\Delta L&=M\cdot a_{cp,M}\end{aligned}\right\}$$

Mivel

$$a_{cp}=r\cdot\omega^2=r\cdot(2\cdot\pi\cdot n)^2$$

ahol n a golyók körmozásának fordulatszáma, írhatjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} D\cdot(L-L_0)&=m\cdot r_m\cdot(2\cdot\pi\cdot n)^2\\ D\cdot(L-L_0)&=M\cdot r_M\cdot(2\cdot\pi\cdot n)^2\end{aligned}\right\}$$

Elegendő az egyik egyenletet felhasználnunk:

$$D \cdot (L - L_0) = m \cdot \frac{M \cdot L}{m + M} \cdot (2 \cdot \pi \cdot n)^2$$

ahonnan

$$L \cdot \left(1 - \frac{m \cdot M}{m + M} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{D}\right) = L_0$$

illetve $M=2 \cdot m$ figyelembe vételével

$$L \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot m}{3} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{D}\right) = L_0$$

azaz

$$L = \frac{L_0}{1 - \frac{2 \cdot m}{3} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2}{D}} = \frac{3 \cdot D \cdot L_0}{3 \cdot D - 8 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot n^2}$$

$$L = \frac{3 \cdot D \cdot L_0}{3 \cdot D - 8 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot n^2} = \frac{3 \cdot 12 \frac{N}{m} \cdot 1\,m}{3 \cdot 12 \frac{N}{m} - 8 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}025\,kg \cdot 4\,\frac{1}{s^2}} = \underline{\underline{1{,}28\,m}}$$

azaz kb. 28 cm-rel nyúlik meg forgás közben a gumiszál, hossza 1,28 m lesz.

8 pont

b) Az előző pontban kapott eredményből látszik, hogy amennyiben a tört nevezőjében zérus van, nem található olyan L gumiszál-hossz, amely mellett létrejöhet a két golyó körmozgása. Tehát a fordulatszám nem érheti el azt az n_{max} értéket, amelyre

$$3 \cdot D = 8 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot n_{max}^2$$

azaz

$$n < n_{max} = \sqrt{\frac{3 \cdot D}{8 \cdot \pi^2 \cdot m}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot D}{2 \cdot m}} = \underline{\underline{4{,}27\,\frac{1}{s}}}$$

6 pont

c) Amennyiben a gumiszál a forgás közben nyújtatlan, csak a két elektromos többlettöltéssel rendelkező golyó között fellépő Coulomb-erő biztosíthatja a centripetális gyorsulást. Ebből következik, hogy a két golyó töltése ellentétes előjelű kell, hogy legyen. A golyók ezúttal is a tömegközéppont körül keringenek, pályasugaruk

$$r_m = \frac{M \cdot L_0}{m + M} \;\; ill. \;\; r_M = \frac{m \cdot L_0}{m + M}$$

Felírva a golyók mozgásegyenletét, kaphatjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} \frac{k \cdot Q_m \cdot Q_M}{L_0^2} &= m \cdot r_m \cdot (2 \cdot \pi \cdot n)^2 \\ \frac{k \cdot Q_m \cdot Q_M}{L_0^2} &= M \cdot r_M \cdot (2 \cdot \pi \cdot n)^2 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből, kihasználva, hogy a golyók többlettöltésének nagysága megegyezik

$$\frac{k \cdot Q^2}{L_0^2} = m \cdot \frac{M \cdot L_0}{m + M} \cdot (2 \cdot \pi \cdot n)^2$$

ahonnan

$$Q^2 = \frac{m \cdot M \cdot L_0^3}{m + M} \cdot \frac{(2 \cdot \pi \cdot n)^2}{k}$$

vagyis

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot L_0 \cdot \sqrt{\frac{m \cdot M}{m + M} \cdot \frac{L_0}{k}}$$

illetve a tömegek közötti kapcsolatot figyelembe véve

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot L_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot L_0}{3 \cdot k}} = \underline{\underline{1{,}71 \cdot 10^{-5}\ C}}$$

Tehát az egyik golyóra $+1{,}71 \cdot 10^{-5}\ C$, a másikra $-1{,}71 \cdot 10^{-5}\ C$ elektromos töltést kell rávinni.

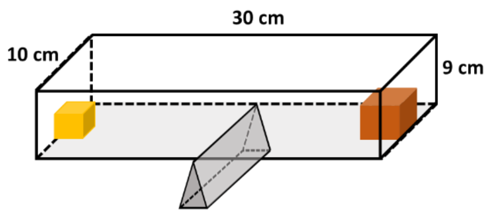
6 pont

XXV. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2022
11. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

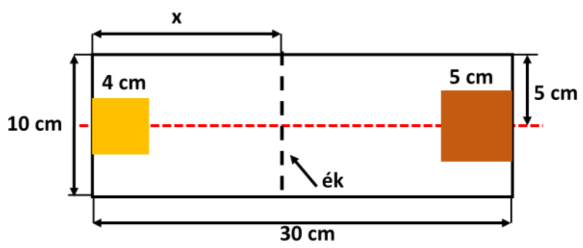
A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.
Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

1. feladat: Felül nyitott, 30 cm x 10 cm x 9 cm-es oldalhosszúságú, téglatest alakú, vékonyfalú edény tömege 104 gramm. Alaplapja hosszabbik középvonalának két végére, közvetlenül az edény függőleges falai mellé odatettek egy 4 cm élhosszúságú fa, illetve egy 5 cm oldalélű műanyag kockát a mellékelt ábrának megfelelően. Ezt követően az edényt egy, a 10 cm-es élekkel párhuzamos állású ékkel úgy támasztották alá, hogy vízszintes helyzetben, egyensúlyban maradjon.



térbeli nézet



felülnézet

a) Az edény bal oldali – a fa kockával érintkező – függőleges falától mérve mekkora x távolságban kellett elhelyezni az éket?
b) Ha az edényt 6 cm magasságig megtöltik vízzel, majd a két kockát eredeti helyüknél a vízbe teszik, át kell-e helyezni az éket ahhoz, hogy az egyensúly továbbra is fennálljon? Válaszodat indokold meg!
A fa sűrűsége $750\,\mathrm{kg/m^3}$, a műanyagé $384\ \mathrm{kg/m^3}$.

Válasz:

a) A két kocka tömege

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot a^3$$

alapján

$$m_{műanyag} = m_{fa} = 48\ g$$

azaz a kockák egyforma tömegűek.
Az ék helyét kétféle gondolatmenettel is megkereshetjük: vagy felírjuk az edény egyensúlyának dinamikai feltételét, vagy megkeressük a két kockából és az edényből álló rendszer tömegközéppontjának helyét. Az alábbiakban részletesen az első megoldást ismertetjük.
Írjuk fel az edényre ható erők eredőjét, és az edény bal oldali lapjának alsó élére az edényre ható erők forgatónyomatékainak összegét – egyensúly esetén mindkettőnek zérusnak kell lennie!
Az edényre hat a két kocka súlya, a nehézségi erő, és az ék nyomóereje. Minden erő függőleges hatásvonalú.

$$m_{fa} \cdot g + M_{edény} \cdot g + m_{műanyag} \cdot g - F_{ny} = 0$$

ahonnan az ék által az edény aljára kifejtett erő nagysága

$$F_{ny} = g \cdot \left(m_{fa} + M_{edény} + m_{műanyag}\right) = 10\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}2\ kg = 2\ N$$

A forgatónyomatékokra vonatkozó egyenlet:

$$m_{fa} \cdot g \cdot \frac{4\ cm}{2} + M_{edény} \cdot g \cdot 15\ cm + m_{műanyag} \cdot g \cdot \left(30\ cm - \frac{5\ cm}{2}\right) - F_{ny} \cdot x = 0$$

Innen

$$x = \frac{10\ \frac{m}{s^2} \cdot (0{,}048\ kg \cdot 2\ cm + 0{,}104\ kg \cdot 15\ cm + 0{,}048\ kg \cdot 27{,}5\ cm)}{2\ N} = \underline{\underline{14{,}88\ cm}}$$

Eszerint az éket az edény bal oldali függőleges falától mérve 14,88 cm távolságban – az edény alaplapjának rövidebb középvonalától balra 0,12 cm=1,2 mm-rel – kell elhelyezni.

10 pont

b) A kockák sűrűsége alapján nyilvánvaló, hogy mindkettő úszhat a vízen, ha ki tudnak szorítani 48 gramm tömegű, azaz 48 cm^3 térfogatú vizet, vagyis, ha a bemerülésük mélysége:

$$h_{műanyag} = \frac{48\ cm^3}{25\ cm^2} = 1{,}92\ cm$$

illetve

$$h_{fa} = \frac{48\ cm^3}{16\ cm^2} = 3\ cm$$

Mivel az edényt 6 cm magasságig töltötték meg, a kockák valóban úsznak, és mivel az általuk kiszorított 96 cm^3 víz az edényben csak

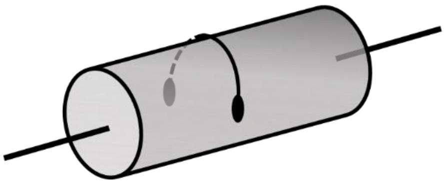
$$\Delta y = \frac{96\ cm^3}{300\ cm^2} = 0{,}32\ cm$$

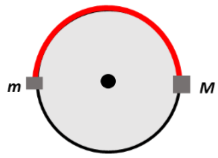
azaz 3,2 mm-es vízszint-emelkedést okoz, így az edényből nem folyik ki víz a kockák vízbe helyezését követően.
Képzeletben cseréljük ki a kockákat 48 cm^3 térfogatú vízzel! Akkor az edényben csak víz lesz, emiatt az egész rendszer tömegközéppontja vízszintes irányban nézve az edény alaplapjának középpontja fölött lesz, azaz a bal oldali függőleges faltól mérve a 30 cm-es oldalhosszúság felénél, 15 cm távolságban. Ha az edény alá, a 10 cm-es élekkel párhuzamosan ide helyezzük el az éket, az edény egyensúlyban lesz. Ha most a 48 cm^3-es térrészekből „kiemeljük” a vizet, és „visszacseréljük” a kockákra, a rendszer tömegközéppontja vízszintes irányban nem mozdul el, hiszen a két kocka közös tömegközéppontjának és az általuk kiszorított víz-térfogatok közös tömegközéppontjának pl. a bal oldali faltól vízszintes irányban mért távolsága ugyanakkora,

így az egyensúly fennmarad. (A kiszorított víztérfogat tömegközéppontja a kockára ható felhajtóerő támadáspontja. A kocka tömegközéppontja a rá ható nehézségi erő támadáspontja. Amikor a kocka egyensúlyi helyzetben úszik, e két pont egymás fölött van.)
Tehát, ha az edénybe vizet töltenek, majd a vízbe beteszik a kockákat, akkor annak érdekében, hogy az edény egyensúlyát biztosítani tudják, az éket az a) pontban meghatározott helyzetéből 0,12 cm-rel jobbra el kell mozdítani, azaz át kell helyezni az edény alaplapjának rövidebb középvonala alá.

10 pont

2. feladat: Rögzített, vízszintes hossztengelyű hengeres rúdon átvetett, a henger alapköre kerületének felével egyenlő hosszúságú fonál két végére különböző tömegű, kisméretű nehezékeket kötöttek, majd a henger tengelyének magasságából, kezdősebesség nélkül elengedték a testpárt. (Lásd a mellékelt ábrákat!) Megfigyelték, hogy a bekövetkező mozgás során a kisebb, m=5 gramm tömegű nehezék éppen a palást legfelső pontjához érkezve válik el a hengerfelülettől. Hány gramm a fonál másik végén lévő nehezék M tömege?
(A fonál elhanyagolható tömegű és nyújthatatlan, a nehezékek és a hengerpalást közötti súrlódástól is eltekinthetünk.)

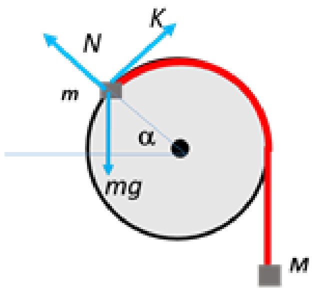

térbeli nézet



tengely irányú nézet

Válasz:

A kisebb nehezék körpályán mozog a hengerpaláston, egészen a legfelső pontig, közben sebességének nagysága és iránya is változik. Amikor a hozzá húzott sugár éppen α szöget zár be a vízszintessel, mozgásegyenlete a következő:



$$\left.\begin{aligned} m \cdot g \cdot sin\alpha - N &= m \cdot \frac{v^2}{R} \\ K - m \cdot g \cdot cos\alpha &= m \cdot a_M \end{aligned}\right\}$$

ahol a_M a fonál másik végén függő test pillanatnyi gyorsulása:

$$M \cdot g - K = M \cdot a_M$$

(Kihasználtuk, hogy a fonál nyújthatatlan, a két test pályamenti gyorsuláskomponense megegyezik.)
Mivel a veszteségektől eltekinthetünk, a mechanikai energia megmarad, vagy más megközelítésben: alkalmazható a munkatétel. A rendszernek a negyed körív befutásának pillanatában meglévő mozgási energiája a magassági energia változásából – összességében csökkenéséből – fakad:

$$M \cdot g \cdot \frac{R \cdot \pi}{2} - m \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot v^2$$

Ha a legfelső pontban az m tömegű nehezék elválik a felülettől, akkor

$$m \cdot g \cdot sin\alpha - N = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow \alpha = 90° \text{ és } N = 0 \rightarrow g = \frac{v^2}{R}$$

Beírva ezt az összefüggést az energiamérlegbe:

$$M \cdot g \cdot \frac{R \cdot \pi}{2} - m \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot R \cdot g$$

azaz

$$M \cdot \frac{\pi}{2} - m = \frac{M}{2} + \frac{m}{2}$$

ahonnan

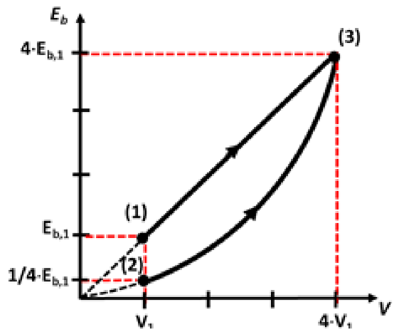
$$\frac{M}{2} \cdot (\pi - 1) = \frac{3 \cdot m}{2}$$

tehát a fonál másik végén lévő nehezék tömege

$$M = \frac{3 \cdot m}{\pi - 1} = \underline{\underline{7\ gramm}}$$

20 pont

3. feladat: Egyatomos, ideális gáz két különböző folyamatában tanulmányozták, hogy térfogatának változtatása közben miként alakul a belső energiája. A vizsgálatok eredményeit a mellékelt ábrán látható diagram mutatja. A (2)-(3) állapotok között végbemenő folyamatot jellemző görbe egy olyan parabola szakasza, melynek csúcspontja a koordinátarendszer origójában van. Határozd meg a gáz által a két folyamatban végzett munkák hányadosát!



Válasz:

Ideális atomos gázról lévén szó, a belső energia egyenesen arányos az abszolút hőmérséklettel, és a szabadsági fokszám *f*=3:

$$E_b = \frac{3}{2} \cdot N \cdot k \cdot T = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

ahol *N* a részecske-, *n* a mólszám.

A grafikonról láthatóan – a folyamatot leíró görbe az origón áthaladó egyenes – az 1-3 folyamatban a belső energia egyenesen arányos a térfogattal:

$$\frac{E_{b1}}{V_1} = \frac{E_{b3}}{V_3} = \frac{4 \cdot E_{b1}}{4 \cdot V_1} = const.$$

Mivel az állapotegyenlet alapján a belső energia a térfogattal és a nyomással is kifejezhető következik, hogy

$$E_b = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{3}{2} \cdot p \cdot V \leftrightarrow \quad E_b = const. \cdot V$$

vagyis az 1-3 folyamat izobár. A konstans (az adott folyamatot ábrázoló egyenes iránytangense) a nyomás 3/2-szerese. A nyomás tehát az 1-3 folyamatban, kifejezve a grafikonról leolvasható adatokkal:

$$E_{b,1} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot V_1 \ \rightarrow p_1 = p_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{E_{b1}}{V_1}$$

A 2-3 folyamatban a belső energia a térfogat négyzetével arányosan változik:

$$E_b = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{3}{2} \cdot p \cdot V = konstans \cdot V^2$$

Ebből következik, hogy ebben a részfolyamatban a gáz nyomása és térfogata lineáris kapcsolatban áll egymással:

$$\frac{3}{2}\cdot p\cdot V = konstans\cdot V^2 \;\rightarrow\; p=\frac{2}{3}\cdot konstans\cdot V$$

Mivel a 2-es állapotban ismerjük a térfogat és a belső energia értékét, a konstans kifejezhető:

$$E_b = konstans\cdot V^2 \;\rightarrow\; \frac{E_{b1}}{4} = konstans\cdot V_1^2 \;\rightarrow konstans = \frac{E_{b1}}{4\cdot V_1^2}$$

azaz a 2-3 folyamatban a nyomás térfogatfüggése:

$$p=\frac{2}{3}\cdot\frac{E_{b1}}{4\cdot V_1^2}\cdot V = \frac{E_{b1}}{6\cdot V_1^2}\cdot V$$

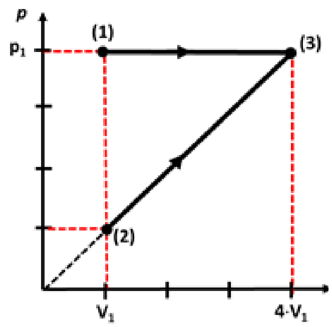
Innen

$$p_2=\frac{E_{b1}}{6\cdot V_1^2}\cdot V_2 = \frac{E_{b1}}{6\cdot V_1^2}\cdot V_1 = \frac{E_{b1}}{6\cdot V_1}$$

ami egyébként abból is nyilvánvaló, hogy a gáz nyomása és térfogata lineáris kapcsolatban áll egymással:

$$\frac{p_2}{V_1}=\frac{p_3}{4\cdot V_1}=\frac{p_1}{4\cdot V_1} \;\rightarrow\; p_2=\frac{1}{4}\cdot p_1=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{E_{b1}}{V_1}=\frac{E_{b1}}{6\cdot V_1}$$

A folyamatokat ábrázolhatjuk *p-V* állapotsíkon is, ezzel megkönnyítve a munkák kiszámítását, ui. a nyomás-térfogat függvény grafikonja alatti terület számértéke megadja a gáz munkáját. Mivel mindkét folyamatban nő a gáz térfogata, mindkét folyamatban pozitív munkát végez a gáz.



Az 1-3 folyamatban a gáz munkája:

$$W_{13}=p_1\cdot(V_3-V_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{E_{b1}}{V_1}\cdot(4\cdot V_1-V_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{E_{b1}}{V_1}\cdot 3\cdot V_1 = \underline{2\cdot E_{b1}}$$

A 2-3 folyamatban a gáz munkája:

$$W_{23}=\frac{p_2+p_3}{2}\cdot(V_3-V_1)=\frac{\frac{E_{b1}}{6\cdot V_1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{E_{b1}}{V_1}}{2}\cdot(4\cdot V_1-V_1)$$

$$W_{23}=\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{E_{b1}}{V_1}}{2}\cdot 3\cdot V_1=\underline{\frac{5}{4}\cdot E_{b1}}$$

Eszerint a keresett hányados:

$$\frac{W_{13}}{W_{23}}=\frac{2\cdot E_{b1}}{\frac{5}{4}\cdot E_{b1}}=\frac{8}{5}=\underline{\underline{1{,}6}} \qquad vagy \qquad \frac{W_{23}}{W_{13}}=\frac{\frac{5}{4}\cdot E_{b1}}{2\cdot E_{b1}}=\frac{5}{8}=\underline{\underline{0{,}625}}$$

20 pont

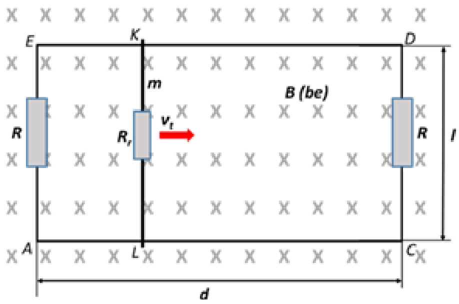
4. feladat: Vízszintes síkban egymástól l=20 cm távolságban futó, elhanyagolható ellenállású vezetősínek két végét lezáró R=2 Ω ellenállású fémrudak távolsága d=1 m. (Lásd a mellékelt ábrát!) Az egész fémkeret függőlegesen lefelé irányuló, B=0,2 T nagyságú indukcióval jellemezhető homogén mágneses mezőben van. A lezáró fémrudakkal párhuzamos állásban ráhelyezett R_r=1 Ω ellenállású, m=10 gramm tömegű fémpálca gyakorlatilag súrlódás nélkül csúszhat a sínpáron. Az időmérés kezdetén (t=0) a keret *AE* oldalának közvetlen közelében lévő pálcát – a közepére mért ütéssel – v_0 nagyságú, a sínekkel párhuzamos irányú kezdősebességgel elindítjuk.

a) Írd fel a pálcán átfolyó áram erősségét a v_t pillanatnyi sebességének függvényében megadó kifejezést! Milyen irányú a pálcán átfolyó áram?

b) Legfeljebb mekkora v_0 kezdősebességet adhatunk a pálcának, hogy ne fusson túl a keret *DC* oldalán?

c) Az összes ellenállást figyelembe véve mekkora hőmennyiség fejlődik az előző pontban meghatározott kezdősebességgel létrehozott mozgás folyamata alatt?

(Az önindukció jelenségétől és a sugárzásos veszteségektől eltekintünk.)



Válasz:

a) A rendszert helyettesíthetjük képzeletben egy, a *KL* pontok között lévő, R_r belső ellenállású, $\varepsilon = B \cdot l \cdot v_t$ elektromotoros erejű áramforrással, melyre csatlakozik a párhuzamosan kapcsolt két *R* nagyságú ellenállás. Itt kihasználjuk, hogy amikor az *l* hosszúságú fémpálca pillanatnyi sebessége v_t, és a mágneses indukció *B* vektora merőleges mind a pálcára, mind annak sebességvektorára, akkor a pálcában indukálódó elektromotoros erő

$$\varepsilon = B \cdot l \cdot v_t$$

Ennek a helyettesítő kapcsolásnak a segítségével az „áramforráson”, azaz a pálcán átfolyó áram erősségét könnyen megkaphatjuk:

$$I(t) = \frac{B \cdot l \cdot v(t)}{R_{eredő}}$$

ahol

$$R_{eredő} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + R_r = \frac{R}{2} + R_r = 2\,\Omega$$

azaz

$$I(t) = \frac{B \cdot l \cdot v(t)}{\frac{R}{2} + R_r} = \frac{0{,}2\,T \cdot 0{,}2\,m}{2\,\Omega} \cdot v(t) = \underline{\underline{0{,}02\,\frac{C}{m} \cdot v(t)}}$$

Eszerint a pálcán átfolyó áram erőssége mozgásának pillanatnyi sebességével egyenesen arányos. Az áram irányát a jobbkéz-szabállyal, vagy Lenz törvényével kereshetjük meg: A pálcában <u>az áram az *L* pont felől a *K* felé folyik,</u> mert így lép fel a pillanatnyi sebességgel ellentétes irányú mágneses erő, ami gátolja az indukciós folyamatot, azaz a pálca mozgását.

6 pont

b) A pálcára a mágneses mező által kifejtett erő – Lenz törvénye értelmében – a mozgásiránynyal, a pillanatnyi sebességgel szemben mutat, ezért a gyorsulás *x* komponensére nézve – amennyiben a kezdősebesség irányában vesszük fel vonatkoztatási rendszerünk *x* tengelyét – a következőt írhatjuk fel:

$$-B \cdot I(t) \cdot l = m \cdot a(t)$$

illetve

$$-B \cdot \frac{B \cdot l \cdot v(t)}{\frac{R}{2} + R_r} \cdot l = m \cdot a(t)$$

vagyis

$$-\frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v(t)}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} = a(t)$$

Láthatóan a sebességgel arányosan változik a gyorsulás, ahogyan a sebesség egyre csökken, úgy a gyorsulás is, egyszerre veszik fel a zérus értéket is. Felírva a gyorsulást, mint a sebesség változási gyorsaságát, kapjuk, hogy

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot v(t) = \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_t$$

ahol Δt nagyon rövid időintervallum a t időpillanat körül.
Akkor a

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot v(t) \cdot \Delta t = \Delta v(t)$$

átrendezett alakból kaphatjuk, hogy

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot \Delta s(t) = \Delta v(t)$$

ahol $\Delta s(t)$ illetve $\Delta v(t)$ a t időpillanat körüli Δt igen rövid időintervallumban a pálca által megtett út, illetve a bekövetkezett sebességváltozás.
Összegezzük a pálca által megtett „elemi” $\Delta s(t)$ utakat, illetve $\Delta v(t)$ sebességváltozásokat t=0-tól a teljes mozgásidőre!

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot \sum_{t=0}^{t_{teljes}} \Delta s(t) = \sum_{t=0}^{t_{teljes}} \Delta v(t)$$

A teljes mozgásidő alatt az „elemi” utak összege nem lehet nagyobb, mint a d távolság, és miközben ezt megteszi a pálca, sebességének éppen zérusra kell csökkennie:

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot d = 0 - v_0$$

Vagyis a pálca legfeljebb akkora kezdősebességgel indítható el, melyre teljesül, hogy

$$v_{0,max} = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot d}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)}$$

Számértékileg a kérdésre adható válasz: a kezdősebesség legfeljebb

$$v_{0,max} = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot d}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} = \frac{0,2^2 T^2 \cdot 0,2^2 m^2 \cdot 1\, m}{0{,}01\, kg \cdot 2\, \Omega} = \underline{\underline{0{,}08\, \frac{m}{s} = 8\, \frac{cm}{s}}}$$

nagyságú lehet.

10 pont

c) A folyamat során az ellenállásokon átfolyó áram miatt Joule-hő fejlődik, miközben csökken a pálca mozgási energiája. A folyamat végére a pálca elveszíti mozgási energiáját, és mivel nyugalomba kerülve nem indukálódik benne áramot fenntartó elektromotoros erő, a körben folyó áram erőssége is zérusra csökken. Az „elvesző” mechanikai energia az ellenállásokon fejlődő hő kibocsátásával a környezetbe került:

$$Q_{Joule} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{0,max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01\, kg \cdot \left(0{,}08\, \frac{m}{s}\right)^2 = \underline{\underline{3{,}2 \cdot 10^{-5} J}}$$

4 pont

XXV. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára, 2022
12. OSZTÁLY – MEGOLDÁSOK

A kiadott javítókulcsban a feladatok egy lehetséges megoldása szerepel, természetesen minden más helyes megoldást el kell fogadni. Minden feladat 20 pontot ér, ahol alkérdések vannak, ott ennek a pontszámnak a részekre felbontását megadtuk. A részben helyes megoldásokat is jutalmazni kell, azonban erre vonatkozó részletes szabályozást nem adtunk, a kialakult tanári gyakorlatra szeretnénk hagyatkozni.
Az egységességhez való közelítés érdekében mindössze a következő néhány alapelv szem előtt tartását kérjük:

- *Ha egy alkérdésre vonatkozó válasz csupán egy ízben elkövetett numerikus tévedés (számolási hiba, mértékegység-prefixum, átváltás tévesztése, stb.) miatt hibás, de a gondolatmenet helyes, az alkérdésre adható pontszám 75-80 %-át adjuk.*
- *Helyes kiindulás, majd elakadás esetén legfeljebb a pontszám 25 %-a adható. (Pusztán képletek forrásmunkákból történő kimásolása nem tekinthető értékelhető megoldási kísérletnek.)*
- *Amennyiben egy feladatban alkérdések nincsenek, a részmegoldásokat arányosan csökkentett pontszámmal jutalmazzuk. Egyszeri számítási hibáért ilyen feladatoknál elegendő 10 %-os pontlevonást alkalmazni.*
- *Egy elkövetett hibát ne büntessünk többször: ha egy alkérdésre adott válasz egy másik alkérdésből „hozott hiba” miatt helytelen, újabb pontlevonást már ne alkalmazzunk, ha újabb tévedése nincs, az adott alkérdésre kapja meg a teljes pontszámot a versenyző.*

1. feladat: Egy meteorológiai műhold az Egyenlítő síkjára merőleges síkban, a sarkok fölött áthaladó – úgynevezett *poláris* – pályán, a felszíntől mérve állandó, 830 km-es magasságban kering a Föld körül.
a) Mekkora a műhold sebessége?
b) A műhold egy adott pillanatban az ecuadori Isabela-szigeten lévő, pontosan az Egyenlítőre eső Wolf-vulkán felett halad át. Miután egy teljes kört megtesz, pályája ismét keresztezi az Egyenlítőt, ezúttal a Csendes-óceán egy pontja fölött. Milyen távol van egymástól az Egyenlítőnek ez a két pontja? Melyik esik keletebbre a másiktól?
A Földet tekintsük gömb alakúnak, sugara 6370 km, tömege $6\cdot 10^{24}$ kg, a gravitációs állandó $6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$.

Válasz:

a) A műholdra csak a Föld által kifejtett gravitációs erő hat, ezért mozgásegyenlete

$$\gamma\cdot\frac{m\cdot M_{Föld}}{(R_F+h)^2}=m\cdot\frac{v^2}{R_F+h}$$

Innen a keresett sebesség:

$$v=\sqrt{\gamma\cdot\frac{M_{Föld}}{R_F+h}}=\underline{\underline{7455{,}4\ \frac{m}{s}\approx 7455\ \frac{m}{s}\approx 7{,}5\ \frac{km}{s}}}$$

8 pont

b) A műhold keringési ideje

$$T_m=\frac{2\cdot(R_F+h)\cdot\pi}{v}=6067{,}94\ s\approx 6068\ s\approx 101\ min\approx 1{,}69\ h$$

A Föld forgásának szögsebességét számíthatjuk a napi nap $T_{F,N}$= 24 h=86400 s hosszából, az eltérés az állócsillagokhoz viszonyított $T_{F,Cs}$= 23 h 56 m 4,1 s≈86164 s-tól a problémára adott válaszban nagyon kicsi eltérést okoz:

$$\omega_F = \frac{2\cdot\pi}{T_{F,N}} = 7{,}272\cdot 10^{-5}\ \frac{1}{s}\quad ill.\quad \omega_F^* = \frac{2\cdot\pi}{T_{F,Cs}} = 7{,}292\cdot 10^{-5}\ \frac{1}{s}$$

Mialatt a műhold egy kört megtesz, a Föld elfordul

$$\Delta\alpha = \omega_F\cdot T_m = \frac{2\cdot\pi}{T_{F,N}}\cdot T_m = 0{,}4413\,rad \approx 25{,}3°$$

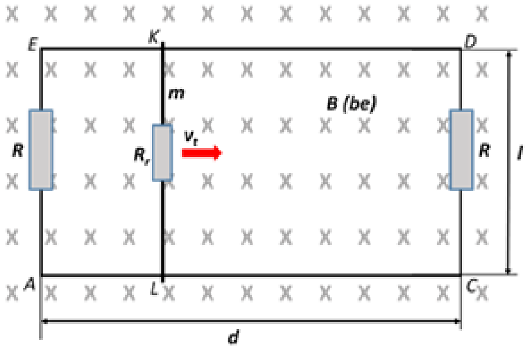
nagyságú szöggel, Nyugat felől Kelet felé. Ekkora hosszúsági fokeltérésnek megfelelő távolság:

$$\frac{\Delta\alpha}{2\cdot\pi} = \frac{\Delta x}{2\cdot\pi\cdot R_F}\ \rightarrow\ \Delta x = R_F\cdot\Delta\alpha = R_F\cdot\omega_F\cdot T_m = 6370\,km\cdot 0{,}4413 \approx \underline{\underline{2811\,km}}$$

Tehát a Csendes-óceán adott pontja körülbelül 2800 km-rel nyugatra esik a Wolf-vulkántól.

12 pont

2. feladat: Vízszintes síkban egymástól l=20 cm távolságban futó, elhanyagolható ellenállású vezetősínek két végét lezáró R=2 Ω ellenállású fémrudak távolsága d=1 m. (Lásd a mellékelt ábrát!) Az egész fémkeret függőlegesen lefelé irányuló, B=0,2 T nagyságú indukcióval jellemezhető homogén mágneses mezőben van. A lezáró fémrudakkal párhuzamos állásban ráhelyezett R_r=1 Ω ellenállású, m=10 gramm tömegű fémpálca gyakorlatilag súrlódás nélkül csúszhat a sínpáron. Az időmérés kezdetén (t=0) a keret AE oldalának közvetlen közelében lévő pálcát – a közepére mért ütéssel – v_0 nagyságú, a sínekkel párhuzamos irányú kezdősebességgel elindítjuk.



a) Írd fel a pálcán átfolyó áram erősségét a v_t pillanatnyi sebességének függvényében megadó kifejezést! Milyen irányú a pálcán átfolyó áram?

b) Legfeljebb mekkora v_0 kezdősebességet adhatunk a pálcának, hogy ne fusson túl a keret DC oldalán?

c) Az összes ellenállást figyelembe véve mekkora hőmennyiség fejlődik az előző pontban meghatározott kezdősebességgel létrehozott mozgás folyamata alatt?

(Az önindukció jelenségétől és a sugárzásos veszteségektől eltekintünk.)

Válasz:

a) A rendszert helyettesíthetjük képzeletben egy, a KL pontok között lévő, R_r belső ellenállású, $\varepsilon=B\cdot l\cdot v_t$ elektromotoros erejű áramforrással, melyre csatlakozik a párhuzamosan kapcsolt két R nagyságú ellenállás. Itt kihasználjuk, hogy amikor az l hosszúságú fémpálca pillanatnyi sebessége v_t, és a mágneses indukció B vektora merőleges mind a pálcára, mind annak sebességvektorára, akkor a pálcában indukálódó elektromotoros erő

$$\varepsilon = B\cdot l\cdot v_t$$

Ennek a helyettesítő kapcsolásnak a segítségével az „áramforráson", azaz a pálcán átfolyó áram erősségét könnyen megkaphatjuk:

$$I(t) = \frac{B \cdot l \cdot v(t)}{R_{eredő}}$$

ahol

$$R_{eredő} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + R_r = \frac{R}{2} + R_r = 2\ \Omega$$

azaz

$$I(t) = \frac{B \cdot l \cdot v(t)}{\frac{R}{2} + R_r} = \frac{0{,}2\ T \cdot 0{,}2\ m}{2\ \Omega} \cdot v(t) = \underline{\underline{0{,}02\ \frac{C}{m} \cdot v(t)}}$$

Eszerint a pálcán átfolyó áram erőssége mozgásának pillanatnyi sebességével egyenesen arányos. Az áram irányát a jobbkéz-szabállyal, vagy Lenz törvényével kereshetjük meg: <u>a pálcában az áram az *L* pont felől a *K* felé folyik, mert így lép fel a pillanatnyi sebességgel ellentétes irányú mágneses erő, ami gátolja az indukciós folyamatot, azaz a pálca mozgását.</u>

6 pont

b) A pálcára a mágneses mező által kifejtett erő – Lenz törvénye értelmében – a mozgásiránnyal, a pillanatnyi sebességgel szemben mutat, ezért a gyorsulás *x* komponensére nézve – amennyiben a kezdősebesség irányában vesszük fel vonatkoztatási rendszerünk *x* tengelyét – a következőt írhatjuk fel:

$$-B \cdot I(t) \cdot l = m \cdot a(t)$$

illetve

$$-B \cdot \frac{B \cdot l \cdot v(t)}{\frac{R}{2} + R_r} \cdot l = m \cdot a(t)$$

vagyis

$$-\frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v(t)}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} = a(t)$$

Láthatóan a sebességgel arányosan változik a gyorsulás, ahogyan a sebesség egyre csökken, úgy a gyorsulás is, egyszerre veszik fel a zérus értéket is. Felírva a gyorsulást, mint a sebesség változási gyorsaságát, kapjuk, hogy

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot v(t) = \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_t$$

ahol Δt nagyon rövid időintervallum a *t* időpillanat körül.

Akkor a

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot v(t) \cdot \Delta t = \Delta v(t)$$

átrendezett alakból kaphatjuk, hogy

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot \Delta s(t) = \Delta v(t)$$

ahol $\Delta s(t)$ illetve $\Delta v(t)$ a t időpillanat körüli Δt igen rövid időintervallumban a pálca által megtett út, illetve a bekövetkezett sebességváltozás.

Összegezzük a pálca által megtett „elemi” $\Delta s(t)$ utakat, illetve $\Delta v(t)$ sebességváltozásokat t=0-tól a teljes mozgásidőre!

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot \sum_{t=0}^{t_{teljes}} \Delta s(t) = \sum_{t=0}^{t_{teljes}} \Delta v(t)$$

A teljes mozgásidő alatt az „elemi” utak összege nem lehet nagyobb, mint a *d* távolság, és miközben ezt megteszi a pálca, sebességének éppen zérusra kell csökkennie:

$$-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} \cdot d = 0 - v_0$$

Vagyis a pálca legfeljebb akkora kezdősebességgel indítható el, melyre teljesül, hogy

$$v_{0,max} = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot d}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)}$$

Számértékileg a kérdésre adható válasz: a kezdősebesség legfeljebb

$$v_{0,max} = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot d}{m \cdot \left(\frac{R}{2} + R_r\right)} = \frac{0,2^2 T^2 \cdot 0,2^2 m^2 \cdot 1\, m}{0{,}01\, kg \cdot 2\, \Omega} = \underline{\underline{0{,}08\, \frac{m}{s} = 8\, \frac{cm}{s}}}$$

nagyságú lehet.

10 pont

c) A folyamat során az ellenállásokon átfolyó áram miatt Joule-hő fejlődik, miközben csökken a pálca mozgási energiája. A folyamat végére a pálca elveszíti mozgási energiáját, és mivel nyugalomba kerülve nem indukálódik benne áramot fenntartó elektromotoros erő, a körben folyó áram erőssége is zérusra csökken. Az „elvesző” mechanikai energia az ellenállásokon fejlődő hő kibocsátásával a környezetbe került:

$$Q_{Joule} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{0,max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01\, kg \cdot \left(0{,}08\, \frac{m}{s}\right)^2 = \underline{\underline{3{,}2 \cdot 10^{-5} J}}$$

4 pont

3. feladat: Egyetemi hallgatók laboratóriumi gyakorlaton az *1. ábrának* megfelelő kapcsolásban vákuum-fotocella cézium katódját 0,045 mW teljesítményű, 550 nm hullámhosszú fénynyalábbal világították meg, és miközben az anód katódhoz viszonyított feszültségének mind a nagyságát, mind a polaritását változtatták, mérték az áramkörben kialakuló áram erősségét. Tapasztalataikat a *2. ábrán* látható diagram mutatja: amennyiben az anódot 4 V-nál nagyobb pozitív feszültségre kapcsolták, gyakorlatilag állandó, 20 nA erősségű áramot mértek (ezt *telítési áramnak* nevezzük), ha viszont az anód katódhoz viszonyított potenciálját negatívra állították be, akkor -0,32 V-nál (az úgynevezett *lezárási feszültségnél*), a fotoáram zérusra csökkent. A köztes intervallumba eső értékeknél a megvilágítás hatására kialakuló áram erőssége a beállított anódfeszültséggel arányosan növekedett.

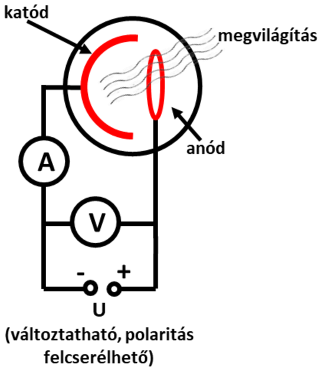
a) Magyarázd meg, miért így alakul az áramerősség-feszültség függvény! (Legfeljebb háromnégy mondatos válaszra szorítkozz!)

b) Az adott megvilágítás mellett mekkora volt a katódból kilépő elektronok maximális sebessége?

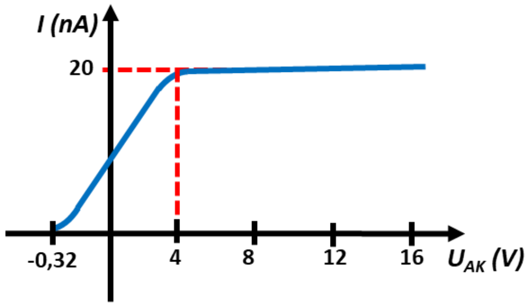
c) Határozd meg a céziumra a kilépési munka nagyságát!

d) A katód a rá eső fény egy részét visszaveri, illetve átengedi, ezért a fotoeffektus szempontjából csak a beérkező energiamennyiség egy része hasznosul. A telítési szakaszban a katódra érkező fotonok hány százaléka váltott ki elektront a végrehajtott vizsgálatban?

A Planck-állandó $6{,}63\cdot10^{-34}$ Js, a vákuumban mérhető fénysebesség $3\cdot10^{8}$ m/s, az elektron töltésének nagysága $1{,}6\cdot10^{-19}$ C, tömege $9{,}1\cdot10^{-31}$ kg.



1. ábra



2. ábra

Válasz:

a) A céziumra érkező fény fotonjainak hatására a katódból kilépő elektronok (*külső fotoeffektus*) az anód és a katód között kialakított – az áramforrás által fenntartott – elektromos mezőbe kerülnek. Ha ez az elektromos mező olyan irányú térerősséggel jellemezhető, hogy az elektronokra a katód felé irányuló erő hat – azaz, amennyiben az anód a katódhoz képest negatív potenciálon van, így a térerősségvektor az anód felé mutat – akkor az elektronok közül csak a legnagyobb sebességgel kilépők tudnak eljutni az anódig, illetve a lezárási feszültséget elérve már azok sem. Ha viszont a térerősségvektor a katód felé mutat, vagyis az anód a katódhoz képest pozitív potenciálon van, akkor attól függően, milyen erős ez a mező, a katódot elhagyó elektronoknak kisebb vagy nagyobb hányadát „szívja magához” az anód: konkrétan a telítődési szakaszra az igaz, hogy már a katódból kiváltott összes elektron eljut az anódra.

6 pont

b) A lezárási feszültség beállítása esetén még a maximális sebességgel kilépő elektronok sem tudják az ellenteret leküzdeni, mozgási energiájukat az anód-katód közötti elektromos mező munkája az anód elérése előtt zérusra csökkenti. A munkatétel alkalmazásával az elektronok maximális kilépési sebessége megkapható:

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{max}^2 = e\cdot U_{lezárási}$$

azaz

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot e\cdot U_{lezárási}}{m}} = \underline{\underline{335451\ \frac{m}{s} \approx 3{,}35\cdot10^{5}\ \frac{m}{s}}}$$

c) Az Einstein-féle fotoelektromos egyenletet, és ismételten a munkatételt alkalmazva:

$$\left.\begin{aligned} h\cdot\frac{c}{\lambda} &= W_{ki} + \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{max}^2 \\ \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{max}^2 &= e\cdot U_{lezárási}\end{aligned}\right\}$$

Innen

$$h\cdot\frac{c}{\lambda} = W_{ki} + e\cdot U_{lezárási} \ \rightarrow\ W_{ki} = h\cdot\frac{c}{\lambda} - e\cdot U_{lezárási}$$

$$W_{ki} = 3{,}61636\cdot10^{-19}J - 5{,}12\cdot10^{-20}J = \underline{\underline{3{,}1\cdot10^{-19}J}}$$

6 pont

d) A Δt idő alatt a katódból kilépő elektronok Q elektromos össztöltése határozza meg a foto-áram erősségét:

$$I = \frac{Q}{\Delta t}$$

ami az elektron elemi töltésével, és a Δt idő alatt a katódból kilépő elektronok $N_{elektron}$ számá-val kifejezve:

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{N_{elektron} \cdot e}{\Delta t}$$

ahol I a telítési áram értéke: $20\ nA = 2 \cdot 10^{-8}\ A$. Ezért az elektronok „kilépési gyakorisága”

$$\frac{N_{elektron}}{\Delta t} = \frac{I}{e} = 1{,}25 \cdot 10^{11}\ \frac{1}{s}$$

A Δt idő alatt a katódra érkező fotonok számát a megvilágító fény teljesítményéből kaphatjuk meg:

$$N_{foton} = \frac{P \cdot \Delta t}{\varepsilon_{foton}} = \frac{P \cdot \Delta t}{h \cdot \frac{c}{\lambda}}$$

Innen

$$\frac{N_{foton}}{\Delta t} = \frac{P}{h \cdot \frac{c}{\lambda}} = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-5}\ W}{3{,}61636 \cdot 10^{-19} J} \approx 1{,}24 \cdot 10^{14}\ \frac{1}{s}$$

Felírva a másodpercenként kiváltott elektronok és a katódfelületre érkező fotonok számának arányát, kaphatjuk, hogy

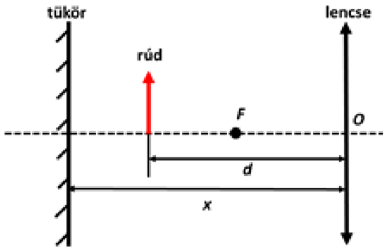
$$\frac{N_{elektron}}{N_{foton}} = \frac{\frac{I \cdot \Delta t}{e}}{\frac{P \cdot \Delta t}{h \cdot \frac{c}{\lambda}}} = \frac{I \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda}}{P \cdot e} = \frac{I \cdot h \cdot c}{P \cdot e \cdot \lambda}$$

$$\frac{N_{elektron}}{N_{foton}} = \frac{I \cdot h \cdot c}{P \cdot e \cdot \lambda} = \frac{3{,}978 \cdot 10^{-33}}{3{,}96 \cdot 10^{-30}} \approx \underline{\underline{10^{-3}}}$$

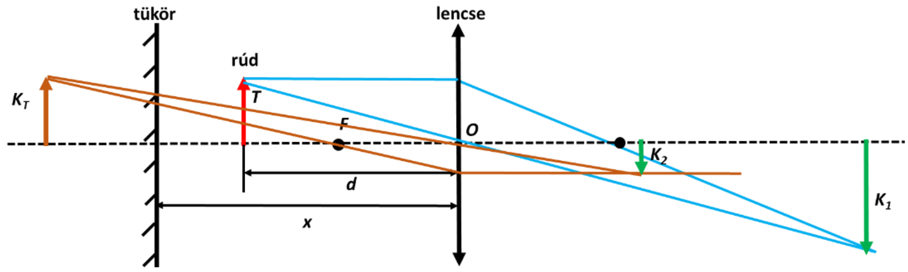
Azaz a telítési szakaszban a katódra érkező fotonoknak körülbelül a 0,1%-a (minden 1000. fo-ton) vált ki elektront.

8 pont

4. feladat: A 20 cm fókusztávolságú vékony gyűjtőlencse optikai tengelyén, a lencsétől mérve d=30 cm-re, a tengelyre merőlegesen áll egy rúd. A lencsétől mekkora x távolságban kell az optikai tengelyre merőlegesen elhelyezni egy síktükröt, hogy a rúdról a lencse által alkotott két valódi kép egyike kétszer akkora magasságú legyen, mint a másik?



Válasz:



A lencse képet alkot a *T* valódi tárgyról, és annak a tükörben keletkező K_T képéről. Valódi képet akkor alkot a gyűjtőlencse, ha a tárgy a fókusztávolságán kívül van. Ez a rúd adott elhelyezkedése miatt mindkét „tárgyra” nézve teljesül. A valódi kép nagyított, ha a tárgy a kétszeres fókusztávolságon belül van, kicsinyített, ha azon kívül.
Tudjuk, hogy $f < d < 2 \cdot f$. Ha a tükröt a megfelelő helyre tudjuk tenni, akkor a lencse a rúdról nagyított, a rúd tükörképéről kicsinyített képet fog alkotni. Legyen

$$n = \frac{K_1}{K_2} = 2$$

a képek méretaránya! Mivel a két leképezés tárgya ugyanakkora, ez a nagyítások arányát is megadja, ugyanis

$$n = \frac{K_1}{K_2} = \frac{N_1 \cdot T}{N_2 \cdot T} = \frac{N_1}{N_2} = 2$$

(Valódi képekről lévén szó, mind a képnagyságok, mind a nagyítások pozitív számok.)
A tükörképnek a lencsétől mért távolsága

$$t_2 = x + x - d = 2 \cdot x - d$$

A lencse két leképezésére felírható egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{d} + \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{2 \cdot x - d} + \frac{1}{k_2} \\ N_2 &= \frac{k_2}{2 \cdot x - d} \\ N_1 &= 2 \cdot N_2 = \frac{k_1}{d} \end{aligned}\right\}$$

Innen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{d} + \frac{1}{2 \cdot N_2 \cdot d} \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{2 \cdot x - d} + \frac{1}{N_2 \cdot (2 \cdot x - d)} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{2 \cdot N_2 \cdot d}{f} &= 2 \cdot N_2 + 1 \\ \frac{N_2 \cdot (2 \cdot x - d)}{f} &= N_2 + 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{d}{f} - 1\right)} \\ N_2 &= \frac{1}{\frac{2 \cdot x - d}{f} - 1} \end{aligned}\right\}$$

azaz

$$\frac{1}{\frac{2 \cdot x - d}{f} - 1} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{d}{f} - 1\right)} \rightarrow \frac{2 \cdot x - d}{f} - 1 = 2 \cdot \left(\frac{d}{f} - 1\right)$$

Rendezés után

$$x = \frac{3 \cdot d - f}{2} = \underline{\underline{35\ cm}}$$

Tehát a tükröt 35 cm távolságban kell elhelyezni a lencsétől.
Ekkor a két tárgytávolság 30 cm és

$$t_2 = 2 \cdot x - d = 40\ cm$$

a megfelelő képtávolságok

$$k = \frac{f \cdot t}{t - f}$$

alapján

$$k_1 = 60\ cm \qquad ill. \qquad k_2 = 40\ cm$$

A nagyítások eszerint

$$N_2 = \frac{k_2}{2 \cdot x - d} = \frac{40\ cm}{40\ cm} = 1$$

illetve

$$N_1 = \frac{k_1}{d} = \frac{60\ cm}{30\ cm} = 2$$

azaz a feladat feltételeinek megfelelően *n*=2.

20 pont