XXIV. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára
2021 – MEGOLDÁSOK

Feladat: 9. oszt./1. 10. oszt./1.

Egy városon keresztülvezető egyenes úton három sebességkorlátozó tábla van. A táblák az alábbi sorrendben követik egymást: 50 km/h, 40 km/h, 30 km/h. A 40 km/h-ás korlátozó tábla éppen félúton van a másik kettő között. Ha az autóvezető be szeretné tartani a táblák jelzéseit a legegyszerűbben két lehetőségből választhat.

(a) A vezető az első és második tábla között 50 km/h-val hajt, majd a 40 km/h-ás táblánál pillanatszerűen csökkentve a sebességét a második és harmadik tábla közt 40 km/h-val megy tovább.

(b) Egy másik lehetőség, hogy a vezető az első táblától állandó lassulással halad, hogy sebessége 50 km/h-ról 40 km/h-ra csökkenjen, és hasonlóan a második és harmadik tábla közt is állandó lassulással csökkenti a sebességét 30 km/-ra.

Melyik változat a rövidebb idejű? Mekkora az (a) és (b) változathoz szükséges idők aránya?

Megoldás: 9. oszt./1. 10. oszt./1.

Ha x a táblák távolsága km-ban, akkor

(a) ♦ $t_a = \dfrac{x}{50} + \dfrac{x}{40} = \boxed{0{,}045\,x}$ órában számolva.

(b) ♦ Folyamatosan lassít 50 km/h-ról 40 km/h-ra, aztán 40 km/h-ról 30 km/h-ra.
A megtett utat ilyen adatok esetén legegyszerűbb az út-idő grafikont használva, a görbe alatti terület segítségével kiszámítani: $s = \dfrac{(v_0 + v_1)\cdot t}{2}$ Innen a szükséges idő $t = \dfrac{2s}{v_0 + v_1}$

Eszerint $t_1 = \dfrac{2x}{50+40} = \dfrac{x}{45}$ és $t_2 = \dfrac{2x}{40+30} = \dfrac{x}{35}$ órában számolva.

Tehát $t_b = \dfrac{x}{45} + \dfrac{x}{35} = \boxed{0{,}051\,x}$.

Az (a) változat (a hirtelen fékezés) kíván tehát kevesebb időt. A két idő aránya: $\underline{\underline{t_b/t_a = \dfrac{51}{45} = 1{,}13.}}$

Feladat: 9. oszt./2. 10. oszt./2.

Vízszintesen haladó lövedék közelít két nyugalomban lévő kockához, melyek súrlódásmentes vízszintes asztalon nyugszanak. A lövedék teljesen átmegy a bal oldali kockán, majd beragad a második kockába. A lövedék tömege 4 g, kezdő sebessége 355 m/s, a bal oldali kocka tömege 1150 g, sebessége 0,55 m/s, miután a lövedék elhagyta. A második kocka tömege 1530 g. Az asztal hossza 40 cm, a bal oldali kocka kezdetben az asztal bal szélén, a jobboldali kocka pontosan az asztal közepén nyugszik.

a) Mekkora a jobb oldali kocka sebessége, miután beleragadt a lövedék?

b) Amikor a jobb oldali kocka elhagyja asztalt, hol lesz a baloldali kocka?

c) Az első ütközéstől számítva, ez mikor következik be?

Megoldás: 9. oszt./2. 10. oszt./2.

Jelölések & adatok: ♦ $m_0 = 4\,\text{g}$, $m_1 = 1150\,\text{g}$, $m_2 = 1530\,\text{g}$, $v_1 = 0{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $2L = 0{,}4\,\text{m}$.

Ad a) ♦ Az első ütközésre felírható a lendületmegmaradás. (A pozitív irány jobbfelé mutat.)

$m_0 v_0 = m_1 v_1 + m_0 v_0'$

Innen a lövedék sebessége miután elhagyja az első kockát: $v_0' = v_0 - \dfrac{m_1}{m_0} v_1 = 196{,}875\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A második ütközés után a jobb oldali kocka és a lövedék közös sebessége v_2. A második ütközésre alkalmazva a lendületmegmaradást:

$m_0 v_0' = (m_2 + m_0) v_2$

Innen a kocka és a lövedék közös sebessége: $v_2 = \dfrac{m_0 v_0'}{m_2 + m_0} = \dfrac{m_0 v_0 - m_1 v_1}{m_2 + m_0} = \underline{\underline{0{,}513\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

Ad b) és c) ♦ A bal oldali kocka sebessége nagyobb, mint a jobb oldali kocka sebessége, így utolérheti végül a jobb oldali kockát, hacsak az hamarabb le nem esik az asztal végéről.

A második kocka a becsapódás után $t_2 = \dfrac{L}{v_2} = 0{,}389\,\text{s}$ alatt éri el az asztal végét.

Amíg a lövedék eléri a második kockát $\Delta t = \dfrac{L}{v_0'} = 1{,}02 \cdot 10^{-3}\,\text{s}$ idő telik el, és a bal oldali kocka $x = \Delta t \cdot v_1 = \dfrac{L}{v_0'} \cdot v_1 = 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$ utat tesz meg, ami nyugodtan elhanyagolható.

Így a bal oldali kocka által megtett út: $v_1 \cdot t_2 = 0{,}555\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}389\,\text{s} = 0{,}215\,\text{m}$.

Tehát a baloldali kocka kissé halad csak túl az asztal felén, amiből már látszik, hogy bizonyosan nem ütköztek mielőtt a jobboldali kocka leesett az asztalról.

Tehát a bal oldali kocka $\underline{\underline{0{,}215\,\text{m}}}$-t tesz meg amikor a jobboldali kocka leesik, és ez az első ütközéstől számítva $\underline{\underline{0{,}389\,\text{s}}}$ idő múlva történt meg.

Megjegyzés Persze kiszámíthatjuk a feltételezett ütközés idejét.

Az első és második kocka t idő múlva bekövetkező ütközésére fennáll, hogy

$v_1 t = L + v_2 t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{L}{v_1 - v_2} = \dfrac{0{,}2}{0{,}55 - 0{,}513} = 4{,}76\,\text{s}\,.$

Tehát a jobb oldali kocka leesik, mielőtt ütközne a két kocka.

Feladat: 9. oszt./3.

Egy raktárépület tetején elhelyezett víztartályt minden nap szivattyúval töltenek fel friss vízzel. A szivattyút 1 lóerős motor működteti, amely 10 perc alatt tölti fel a tartályt. Amikor a tartály megtelik a szivattyú automatikusan kikapcsol. Utána a vizet elhasználják és mindig a teljesen üres tartályt töltik fel újra. A tartály 900 literes és teleszivattyúzva a tömegközéppontja 15 méteres magasságban található.

a) Mekkora munkát végez az elektromos motor a tartály feltöltése során?

b) Mekkora a kiépített víz szivattyúzó rendszer hatásfoka?

c) Egy napon a munkások arra lesznek figyelmesek, hogy a szokásos 10 perc helyett 12 percig működött a szivattyú. Ebből arra következtetnek, hogy a feltöltő vezetékrendszer valahol megsérülhetett. Hány liter víz ment veszendőbe percenként a szivárgás miatt?

Megjegyzés: 1 lóerő egy olyan erő teljesítménye, amely egy 75 kg tömegű testet egy másodperc alatt egy méter magasra emel fel. ($g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$)

Megoldás: 9. oszt./3.

A motor 1 lóerős, ez a teljesítmény mértékegység nem SI beli, de a megjegyzés alapján kikövetkeztethető. Egy 75 kg tömegű testet 1 méter magasra $W = m \cdot g \cdot h$ munka árán lehet fölemelni. Mindez $t = 1\,\mathrm{s}$ alatt történik, azaz a teljesítmény:

$$P = 1\,\mathrm{LE} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{75\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = \boxed{735{,}75\,\mathrm{W}}$$

Jelölések & adatok: ♦ $P = 1\,\mathrm{LE} = 735{,}75\,\mathrm{W}$; $t = 10\,\mathrm{min} = 600\,\mathrm{s}$; $t' = 12\,\mathrm{min} = 720\,\mathrm{s}$; $\Delta t = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$; $V = 900\,\ell = 0{,}9\,\mathrm{m^3}$; $h = 15\,\mathrm{m}$; $\varrho_\mathrm{v} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$.

Ad a) ♦ Az elektromos motor munkája a megadott teljesítmény és az eltelt idő ismeretében könnyen kiszámítható.

$$W = P \cdot t = 735{,}75\,\mathrm{W} \cdot 600\,\mathrm{s} = 441450\,\mathrm{J} = \underline{\underline{441\,\mathrm{kJ}}}$$

Ad b) ♦ A hatásfok meghatározásához először szükséges a hasznos munka meghatározása. A felszivattyúzott vízmennyiség tömege:

$$m_\mathrm{v} = \varrho_\mathrm{v} \cdot V = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 0{,}9\,\mathrm{m^3} = 900\,\mathrm{kg}$$

Ezen vízmennyiség tömegközéppontja került h magasságba, tehát a nehézségi erő ellenében végzett munka, ami a számunkra hasznos munka:

$$W_\mathrm{h} = m \cdot g \cdot h = 900\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 15\,\mathrm{m} = 132435\,\mathrm{J} = \underline{\underline{132\,\mathrm{kJ}}}$$

A hatásfok így:

$$\eta = \frac{W_\mathrm{h}}{W} = \frac{132435\,\mathrm{J}}{441450\,\mathrm{J}} = 0{,}3 = \underline{\underline{30\%}}$$

Ad c) ♦ A szivattyú 10 perc alatt alatt töltötte tele a 900 literes tartályt, amíg nem volt szivárgás. Tehát a szivattyú percenként 90 litert pumpál fel: $\lambda = \dfrac{V}{t} = 90\dfrac{\ell}{\text{min}}$.

A szivattyú automatikusan kikapcsol, amikor a tartály megtelt. Most azonban 2 perccel tovább működött. Ennek a 2 percnyi extra működésnek megfelelő mennyiségű víz ment összesen veszendőbe.

$\Delta V = \lambda \cdot \Delta t = 90\dfrac{\ell}{\text{min}} \cdot 2\,\text{min} = 180\,\ell$

Tehát $180\,\ell$ víz folyt el 12 perc alatt, így a percenként elfolyt víz mennyisége

$$\frac{\Delta V}{t'} = \frac{180\,\ell}{12\,\text{min}} = \underline{\underline{15\,\frac{\ell}{\text{min}}}}$$

Feladat: 10. oszt./3.

Egy rendezvényszervező cégnek hélium gázt kell vásárolnia, hogy elkészíthesse egy nagyszabású szülinapi rendezvény léggömb dekorációját. A gázok árusításával foglalkozó cég honlapján az alábbi tájékoztató táblázat található.

Léggömb méretek				Palackmérettől függően felfújható léggömbök száma					
Átmérő (inch)	Átmérő (~ cm)	Gáztartalom (~ ℓ)	Lebegési idő (~h)	10 ℓ	14 ℓ	20 ℓ	27 ℓ	40 ℓ	50 ℓ
9	23	7	12	179	250	571	600	771	1300
11	28	12	18-24	104	146	333	350	450	758
16	41	36	25-30	35	49	111	117	150	253
18	46	50	36-40	25	35	80	84	108	182
36	91	400	3-5 nap	3	4	10	11	14	23
48	122	949	5-7 nap	1	2	4	4	6	10
60	152	1853	7-9 nap			2	2	3	5
*inch = 2,54 cm				Héliumos léggömb töltése 200 bar-os palackból					

A megrendelő legalább 100 darab léggömböt szeretne és szigorúan kikötötte, hogy azok nem ereszthetnek le a rendezvény ideje alatt. További kérdésre a céget úgy tájékoztatta, hogy a szülinapi mulatság másnap hajnali 4 óráig fog tartani.

a) Az ütemterv szerint a rendezvény napján reggel 8-tól kezdődne a dekoráció felhelyezése. Legalább mekkora méretű léggömböket kell fújni és ehhez mekkora tartályt kell vásárolni, hogy elkészülhessen a megrendelő kívánságainak megfelelő léggömb dekoráció?

b) Hány m^3 légköri nyomású hélium gáz fér a 200 bar töltési nyomású, 20 literes tartályba, 20°C hőmérsékleten?

c) Hány százalékos túlnyomás keletkezik a palackban, ha a hőmérséklet 40°C-ra duplázódik? Hány bar lesz a nyomás ekkor a palackban?

d) Egy 10 literes kiürült héliumos gáztartályban még 0,2 bar túlnyomás uralkodik. Mennyivel nagyobb a tartályba zárt hélium belső energiája a nulla túlnyomású helyzethez képest?

Megjegyzés: A bar a műszaki életben elterjedt nem SI nyomás egység. 1 bar = 10^5 Pa. A légnyomás értékét a számolásokban vehetjük 10^5 Pa-nak.

Megoldás: 10. oszt./3.

Ad a) ♦ Reggel 8-tól másnap hajnali 4 óráig 20 óra telik el. Tehát a léggömböknek legalább 20 órán keresztül nem szabad leereszteniük. A lebegési idők alapján ehhez 41 cm-es átmérőjű luftballon kell, hogy biztosra menjünk. És a kellő mennyiséget (>100 db) 20 literes palack segítségével lehet felfújni.

Ad b) ♦ A légnyomás jó közelítéssel: $p_k = 10^5\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{bar}$; $p = 200\,\mathrm{bar}$; $V = 20\,\mathrm{l} = 0{,}02\,\mathrm{m}^3$ Feltételezzük, hogy a hőmérséklet állandó és a töltés egyensúlyi folyamat. Így Boyle-Mariotte törvénye alapján a légnyomáshoz tartozó térfogat:

$$p \cdot V = p_k \cdot V_k \quad \Rightarrow \quad V_k = \frac{p}{p_k} \cdot V = \frac{200\,\mathrm{bar}}{1\,\mathrm{bar}} \cdot 0{,}02\,\mathrm{m}^3 = \underline{\underline{4\,\mathrm{m}^3}}$$

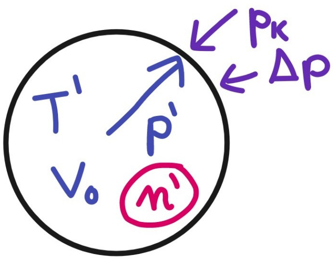
Ad c) ♦ $T = 293\mathrm{K}$-ről a hőmérséklet $T' = 313\mathrm{K}$-re emelkedik állandó (a palack mérete által megszabott) térfogaton:

$$\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'} \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{T'}{T} \cdot p = \frac{313}{293} \cdot p = 1{,}068 \cdot p = \boxed{1{,}068} \cdot 200\,\mathrm{bar} = \underline{\underline{213{,}7\,\mathrm{bar}}}$$

Tehát a túlnyomás 6,8%-os lesz.

Ad d) ♦

Jelölések & adatok: ♦ $V_0 = 10\,\mathrm{l} = 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$; $\Delta p = 0{,}2\,\mathrm{atm} = 0{,}2p_k$; $p_k = 10^5\,\mathrm{Pa}$
A hélium nemesgáz, nem alkot molekulákat, szabadsági foka így $f = 3$.
Nulla túlnyomás esetén a belső nyomás megegyezik a légnyomással.
Az állapothatározók: $\boxed{p_0 = p_k}$; V_0, T_0,
Túlnyomás esetén a belső nyomás a légnyomásnál nagyobb, mégpedig a megadott mértékben.
Az állapothatározók: $\boxed{p' = p_k + \Delta p = p_k + 0{,}2p_k = 1{,}2p_k}$; V_0, T'.



Vigyázat! A két esetben a hélium anyagmennyisége és hőmérséklete különböző lehet. Szorzatuk értékére az ideális gáz állapotegyenlete alapján következtethetünk:

$p_0\,V_0 = n_0 R T_0$ míg $p'\,V_0 = n' R T'$.

Így a keresett belső energia különbség természetesen nem csak a hőmérséklet különbséggel arányos.
A két állapotban a belső energia különbsége: $E_b' - E_{b,0} = \frac{f}{2}\,n' R T' - \frac{f}{2}\,n_0 R T_0$
Ezt a különbséget az állapotegyenlet alapján, a belső nyomások arányának ismeretében ismert mennyiségekkel ki tudjuk fejezni:

$$E_b' - E_{b,0} = \frac{f}{2}\,p'\,V_0 - \frac{f}{2}\,p_0\,V_0 = \frac{f}{2}\,V_0\,(1{,}2p_k - p_k) = \frac{f}{2}\,V_0\,0{,}2p_k.$$

Majd behelyettesítve:

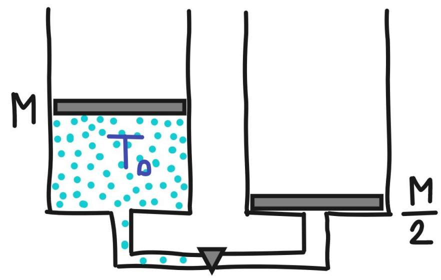
$$E_b' - E_{b,0} = \frac{3}{2} \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \cdot 0{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = \underline{\underline{300\,\mathrm{J}}}$$

Feladat: 11. és 12. oszt./1.

Két azonos függőleges helyzetű hengeres edény rövid és vékony, a közepén csappal ellátott csővel össze van kötve. A baloldali edényben egyatomos ideális gáz van T_0 hőmérsékleten.

A jobboldali hengerben nincs gáz, a dugattyú a henger alján van. Kinyitjuk a csapot. Mekkora lesz a gáz hőmérséklete az egyensúly beállta után?

A baloldali dugattyú tömege M, a jobboldali dugattyú tömege $M/2$, a gáz tömege $M/10$. A dugattyúk súrlódás nélkül mozognak, az egész berendezést hőszigetelt nagy tartályban helyeztük el, amelyben vákuum van. A hengerek és a dugattyúk hőkapacitása elhanyagolható.



Megoldás: 11. és 12. oszt./1.

Legyen n a gáz móljainak mennyisége, $f = 3$, az edény keresztmetszete A.
Kezdetben a baloldali részben van a gáz, térfogata legyen $V_0 = AH_0$, p_0 nyomása tartja a dugattyút: $p_0 = \frac{Mg}{A}$.
A gáz állapotegyenlete $p_0V_0 = nRT_0$.
Beírva a nyomás értékét kapjuk, hogy $MgH_0 = nRT_0$.

A csap kinyitása után a teljes gáz mennyiség átmegy a jobboldali tartályba, másképp ugyanis nem alakulhat ki az egyensúly, ti. hogy a két részben azonos legyen a nyomás.
Az egyensúly beállta után legyen a gáz magassága H, hőmérséklete T, nyomása p. Ez utóbbira most fennáll, hogy $p = \frac{Mg}{2A}$. Az állapotegyenlet $pV = nRT$.
Beírva a nyomás értékét, kapjuk hogy $MgH = 2nRT$.

A rendszer zárt, a környezettel nincs hőcsere, így a rendszerre érvényes az energiamegmaradás. Vegyük figyelembe, hogy a gáz tömege összemérhető a dugattyúk tömegével, így a gáz helyzeti energiaváltozásával is számolni kell.

$$\frac{3}{2}nRT_0 + MgH_0 + \frac{M}{10}g\frac{H_0}{2} = \frac{3}{2}nRT + \frac{M}{2}gH + \frac{M}{10}g\frac{H}{2}.$$

Behelyettesítve az állapotegyenletekből kapott H_0 és H értékeket, kapjuk

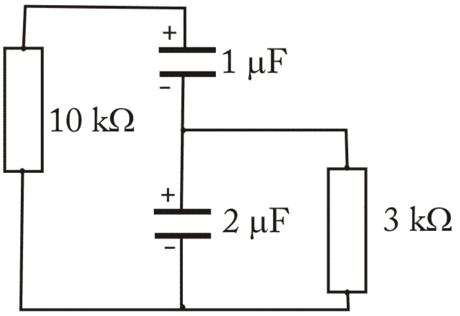
$$\underline{\underline{T = \frac{51}{52}T_0}}$$

Megjegyzések: ♦

1) Ha a gáz tömege elhanyagolható a dugattyúk tömegéhez képest, akkor az energiamegmaradásból $T = T_0$ jön ki, és $p = p_0/2$, $V = 2V_0$.
2) A végállapotban a baloldali dugattyúra lefelé hat az Mg nehézségi erő, felfelé a gáz nyomásából származó $pA = \frac{Mg}{2}$ erő, így a dugattyú további lefelé mozgását az edény fenekétől származó nyomóerő akadályozza meg.

Feladat: 11. és 12. oszt./2.

Egy $1\,\mu$F-os $4\,$V-ra töltött kondenzátort ellentétes pólusával összekötünk egy $2\,\mu$F-os $6\,$V-ra töltött kondenzátorral. A $2\,\mu$F-os kondenzátor kivezetéseire $3\,$kΩ-os ellenállást kapcsolunk és ezzel egyidejűleg a sorba kötött kondenzátorok szabad végeire pedig egy $10\,$kΩ-os ellenállást kötünk. (Lásd ábra.) Mekkora hő fejlődik az ellenállásokon hosszú idő elteltével?



Megoldás: 11. és 12. oszt./2.

Jelölések & adatok: ♦ $C_1 = 1\,\mu$F, $U_1 = 4\,$V; $C_2 = 2\,\mu$F, $U_2 = 6\,$V; $R_1 = 10\,$kΩ, $R_2 = 3\,$kΩ.

A kondenzátorok kezdeti töltése $Q_1 = C_1U_1 = 4\,\mu$C, $Q_2 = C_2U_2 = 12\,\mu$C.

A kondenzátorok az ellenállásokon keresztül kisülnek, az ellenállásokon át az áramok addig folynak, amíg a kondenzátorlemezeken a töltések nullává válnak.

Az ellenállások rákapcsolásakor a kezdeti áramerősségek: $I_1 = \dfrac{U_1 + U_2}{R_1} = 1\,$mA, $I_2 = \dfrac{U_2}{R_2} = 2\,$mA.

A C_1 kondenzátor kisütő árama kezdetben így $1\,$mA, a C_2 kondenzátor kisütő árama kezdetben a kapcsolás szerint $1 + 2 = 3\,$mA. A kezdeti áramok aránya a kondenzátorokon így $1:\,3$, és vegyük észre, hogy a kondenzátorok kezdeti töltéseinek is ugyanez az aránya!
Ebből következik (mivel $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$), hogy az áramok aránya a kisütési folyamatban végig ugyanez marad. Így az ellenállások elektromos teljesítményeinek aránya is végig állandó, mégpedig

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2\,R_1}{I_2^2\,R_2} = \frac{1\cdot 10}{4\cdot 3} = \frac{5}{6} = \text{állandó.}$$

A kondenzátorok kezdeti elektromos energiája tehát ilyen arányban oszlik el végül hőként az ellenállásokon.
A kezdeti elektromos energia: $W = \dfrac{1}{2}(C_1U_1^2 + C_2U_2^2) = 44\,\mu$J.

Ez az elektromos energia fog az adott arányban megjelenni az ellenállásokon fejlődött hőként:
$W_1 = \dfrac{5}{11}\,W = \underline{\underline{20\,\mu\text{J}}}$, $W_2 = \dfrac{6}{11}\,W = \underline{\underline{24\,\mu\text{J}}}$.

Megjegyzés: ♦ A numerikus adatoknak fontos szerepük van! A megoldás azon alapszik, hogy a kezdeti töltések aránya és a kisütő áramok aránya ugyanaz!

Feladat: 11. és 12. oszt./3.

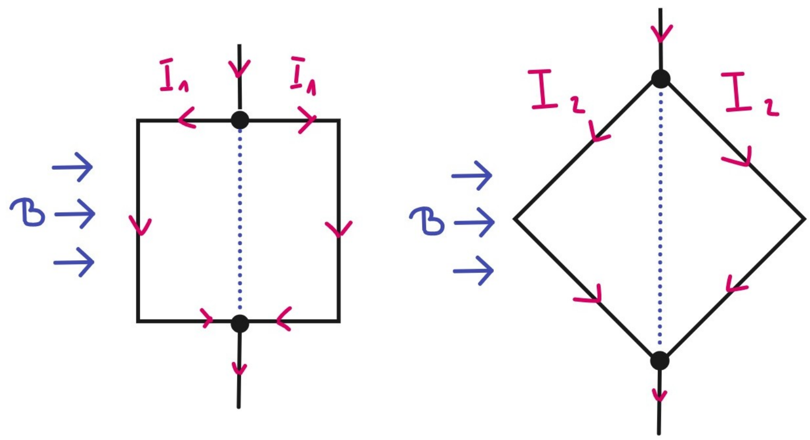
Vékony huzalból d oldalú négyzet alakú keretet formálunk. A felhasznált huzaldarab ellenállása R. A keretet a síkjával párhuzamos irányú B indukciójú homogén mágneses mezőbe helyezzük, majd a keret valamely két pontjához U_0 feszültségű telepet kapcsolunk. A keretet mindig úgy állítjuk be, hogy a telep két csatlakozási pontját összekötő egyenes merőleges legyen B irányára.

1. beállítás: A telep két kivezetését a négyzet két átellenes oldalán a felezőponthoz csatlakoztatjuk.

2. beállítás: A telep két kivezetését a négyzet két átellenes csúcsához csatlakoztatjuk.

a) Mekkora mágneses erő hat a keretre az 1. beállítás esetén?
b) Mekkora forgatónyomaték hat a két csatlakozási pontot összekötő tengely mentén az 1. beállítás esetében?
c) Mekkora mágneses erő hat a keretre a a 2. beállítás esetében?
d) Melyik beállításnál hat nagyobb erő?

Megoldás: 11. és 12. oszt./3.



Ad a) ♦ A homogén mágneses tér erőt fejt ki az áramjárta vezetőre, ez a Lorentz-erő: $F = B_\perp \cdot I \cdot L$. Értéke maximális, ha a mágneses indukció vektor és az áram iránya egymásra merőlegesek és nulla, ha párhuzamosak. Irányát pedig a jobbkéz-szabály adja meg: az áram iránya, B mező iránya és kapott erő iránya sorrendnek megfelelően.

A kérdéses beállítás vázlatos rajza az ábrán látható. A huzaldarab teljes ellenállása R, így a két párhuzamosan kapcsolt, fele olyan hosszúságú darab ellenállása egyenként $R/2$.
A keretre kapcsolt U_0 feszültség a huzaldarabokban rendre I_1 áramot indít, melynek nagysága $R/2 \cdot I_1 = U_0$ alapján: $\boxed{I_1 = 2U_0/R}$.

Erőhatás csak a B mágneses indukció vektorokra merőleges, d hosszúságú vezetékszakaszokból keletkezik. Ez az erő a két ágban megegyező nagyságú és jobbkéz-szabály alapján, a rajz síkjára merőlegesen kifelé mutat mindkét ágban. Az erők összege így:

$$F_1 = 2 \cdot F = 2 \cdot (B \cdot I_1 \cdot d) = 2 \cdot \left(B \cdot \frac{2\,U_0}{R} \cdot d\right) = \underline{\underline{4 \cdot \frac{B \cdot U_0 \cdot d}{R}}}$$

Ad b) ♦ Mint azt már az a) részben megállapítottuk a bal és jobb ágban ható erők a nagyságra megegyeznek és a jobbkéz-szabály alapján, a rajz síkjára merőlegesen kifelé mutatnak. Mindkét erő karja d/2 az adott tengelyre vonatkozóan. Forgatónyomatékuk tehát azonos nagyságú, de ellentétes irányú, így az eredő forgatónyomaték az adott tengelyre nulla.

Ad c) ♦ A keretre kapcsolt U_0 feszültség a 2. beállítás esetén is ugyanakkora áramot indít, mint az első esetén, hisz a két darab ellenállása változatlanul $R/2$: $\boxed{I_2 = I_1 = 2U_0/R}$.

Az indukcióvektor vezetékdarabokra merőleges komponense $B_\perp = B/\sqrt{2}$ nagyságú, hisz 45°-ot zár be a négyzet oldalaival.

A négyzet mind a négy oldalán azonos nagyságú és a rajz síkjából kifelé mutató Lorentz-erő fog hatni, így az eredő erő:

$$F_2 = 4 \cdot F' = 4 \cdot (B_\perp \cdot I_2 \cdot d) = 4 \cdot \left(\frac{B}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\,U_0}{R} \cdot d \right) = \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot \left(4 \cdot \frac{B \cdot U_0 \cdot d}{R} \right)}}$$

Ad d) ♦ Összevetve a kapott erők nagyságát látszik, hogy $\boxed{F_2 = \sqrt{2} F_1}$.
Azaz a 2. beállításnál nagyobb erő hat, mégpedig az elsőnél ható erő $\sqrt{2}$-szöröse.

Feladat – TESZT: 9, 10, 11, és 12. oszt./4.

A hang hullámként terjed, ezért érvényesek rá a hullámmozgásra vonatkozó általános törvények. Ezen törvények egyike szerint a hullám c sebessége kapcsolatban áll a hanghullám f frekvenciájával és λ hullámhosszával: $c = \lambda \cdot f$. Egy másik törvény pedig azzal foglalkozik, hogy a hanghullámok miként verődnek vissza két különböző közeg határán. A visszavert hullám (I_R) intenzitása és a beeső hullám (I_0) intenzitása az alábbiak szerint aránylik egymáshoz:

$$\frac{I_\mathrm{R}}{I_0} = \left(\frac{\rho_1 \cdot c_1 - \rho_2 \cdot c_2}{\rho_1 \cdot c_1 + \rho_2 \cdot c_2}\right)^2,$$

ahol ρ_1 és ρ_2 a kérdéses közegek sűrűsége, míg c_1 és c_2 a hangsebesség nagysága az egyes közegekben. A hanghullámok jellemzően jobban visszaverődnek a közeghatárról akkor, ha a sűrűségek jelentősen eltérnek egymástól.

A 20 000 Hz feletti un. ultrahangokat széleskörűen használják az orvosdiagnosztikában. Ultrahangos vizsgálatokkal az orvosok "belelátnak" a betegek testébe olyan esetben is, amikor a röntgensugarak nem alkalmazhatóak.

A képalkotás elmélete a következő: hangimpulzust küldünk a testbe, és megmérjük, hogy mennyi idő telik el, amíg visszatér a visszavert impulzus. A hanghullám sebességének ismeretében a számítógép ezeket a visszhangokat alakítja képpé.

A képalkotás a hanghullám sebességétől függ, így érdemes megnézni, hogy a hang milyen sebességgel halad adott közegekben:

Közeg	ρ [kg/m^3]	c [m/s]
levegő	1,05	344
víz	1000	1480
izom	1047	1570

1. Izomszövetet vizsgálva az ultrahangos képalkotó berendezés a visszavert impulzust 10^{-5} másodperccel a kibocsátott impulzus elküldése után érzékeli. Ez alapján a detektor és a visszaverő közeg távolsága:

   A. 0,01570 m B. 0,03140 m C. 0,007850 m D. 0,001570 m

2. Az alábbiak közül melyiket a legnehezebb ultrahangos készülékkel "látni"?

   A. csont az izomszövetben.
   B. gázzal töltött gyomor és gyomorfal.
   C. hólyagfal és vizelet a hólyagban.
   D. epekő az epehólyagban.

3. Az alábbiak közül melyik adja meg az 5 cm-es levegőn, vízben és izomszöveten való áthaladásához szükséges időket?

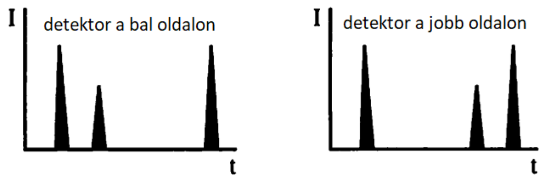
   A. $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ s; $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ s; $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ s.
   B. $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ s; $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ s; $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ s.
   C. $1{,}5 \cdot 10^{-1}$ s; $3{,}4 \cdot 10^{-2}$ s; $3{,}2 \cdot 10^{-2}$ s.
   D. $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ s; $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ s; $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ s.

4. Ha az ultrahangos képalkotó berendezés 157 000 Hz frekvencián működik, akkor mekkora a legkisebb objektum, amelyet a berendezés még észlelni tud?

   A. Körülbelül 1 mm.
   B. Körülbelül 1 cm.
   C. Körülbelül 1 m.
   D. Nincs ilyen minimális méret.

5. Ha ultrahangot bocsátunk a fej oldalára, akkor a hanghullámok visszapattannak a koponya oldaláról és az agy középvonaláról is.

Az ábrán látható két oszcilloszkóp nyom mutatja a hang intenzitását a detektorban az idő függvényében, abban a két esetben, amikor a vizsgáló fejet a beteg fejének bal, illetve a jobb oldalára helyezik.



Ezekből a grafikonokból egy szakember arra következtetett, hogy ...

A. a páciens agyának bal oldala nagyobb, mint a jobb oldala.
B. a páciens agyának jobb oldala nagyobb, mint a bal oldala.
C. a páciens agyának mindkét oldala azonos méretű volt.
D. ez a módszer nem mond semmit sem az agy féltekéinek relatív méretéről.

Megoldás:

1. kérdés	2. kérdés	3. kérdés	4. kérdés	5. kérdés
C.	C.	A.	B.	B.

1. Izomszövetet vizsgálva az ultrahangos képalkotó berendezés a visszavert impulzust 10^{-5} másodperccel a kibocsátott impulzus elküldése után érzékeli. Ez alapján a detektor és a visszaverő közeg távolsága:

   C. 0,007850 m

   Izomszövet esetén a hangsebesség $c = 1570\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A visszavert impulzus $\Delta t = 10^{-5}$ s idő alatt teszi meg oda és vissza a forrástól vett d távolságot:

$$2\,d = c \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad d = \frac{c \cdot \Delta t}{2} = \frac{1570 \cdot 10^{-5}}{2} = \underline{\underline{0{,}00785\,\mathrm{m}}}$$

2. Az alábbiak közül melyiket a legnehezebb ultrahangos készülékkel "látni"?

   C. hólyagfal és vizelet a hólyagban.

   Nem kell az intenzitásokra vonatkozó egyenlethez nyúlnunk ahhoz, hogy megválaszoljuk ezt a kérdést. A szövegben lévő információ is elegendő. *A hanghullámok jellemzően jobban visszaverődnek a közeghatárról akkor, ha a sűrűségek jelentősen eltérnek egymástól.*

   De miért a C válasz a legjobb? A vizelet sűrűsége közel áll a víz sűrűségéhez. A hólyag sűrűsége pedig közel áll az izomzatéhoz. A táblázat alapján a víz és az izomszövet sűrűsége alig tér el egymástól. Ez teljesen logikus, hiszen az emberi szervezet alkotó izomszövet majdnem 80%-ban vízből áll. Így a vizelet és a hólyag fal határán a visszaverődés gyenge (bár kimutatható). A többi választási lehetőségnél mindenütt két eltérő sűrűségű közege szerepel: csont és izom, gáz és izom, kő és izom. Ezek a közegek mind jó reflexiókat adnak.

3. Az alábbiak közül melyik adja meg az 5 cm-es levegőn, vízben és izomszöveten való áthaladásához szükséges időket?

   A. $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ s; $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ s; $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ s.

   Az összes számolás elvégzése nélkül is ki lehet okoskodni a helyes választ.

   A hanghullámok gyorsabban haladnak az izomban, mint a vízben, és gyorsabban haladnak vízben, mint levegőn. Így a keresett számok csökkenő sorrendben szerepelnek (levegő, víz és izomszövet esetében). Ez a feltétel a B. és D. válasz esetén nem teljesül.

A C. válasz sorrendje helyes, de a számok nagyságrendje téves. A hang szinte azonnal megtesz 5 cm távolságot levegőben. Miközben a C válasz azt jelentené, hogy $0{,}15 \cdot 20\,\mathrm{s}$ tehát több mint 1 másodperc kellene 1 méter megtételéhez. Ez nyilván túl sok. Így kizárásos alapon az A. válasz a helyes.

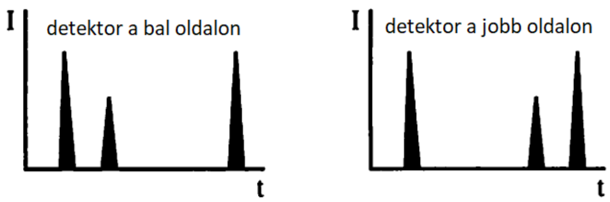
Persze ki is számolhatunk mindent: $\Delta t = \dfrac{d}{c} = \dfrac{0{,}05\,\mathrm{m}}{c}$

Közeg	c [m/s]	Δt [s]
levegő	344	$1{,}47 \cdot 10^{-4}$
víz	1480	$3{,}39 \cdot 10^{-5}$
izom	1570	$3{,}18 \cdot 10^{-5}$

4. Ha az ultrahangos képalkotó berendezés 157 000 Hz frekvencián működik, akkor mekkora a legkisebb objektum, amelyet a berendezés még észlelni tud?
   B. Körülbelül 1 cm.

   A hullámhossznál kisebb objektumoknál már elhajlási jelenségek lesznek, így nem kapunk egy jól látható árnyékot róla.
   $c = \lambda \cdot f$ alapján a mondott hullámhossz $\lambda = \dfrac{c}{f}$ módon számolható. Mivel az emberi test jelentős része izomszövet (de azt is mondhatnánk, hogy víz) így a nagyságrendi becsléshez használhatjuk a $c = 1570\,\mathrm{m/s}$ hangsebességet: $\lambda = \dfrac{1570\,\mathrm{m/s}}{157000\,1/\mathrm{s}} = 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm}$.

5. Ha ultrahangot bocsátunk a fej oldalára, akkor a hanghullámok visszapattannak a koponya oldaláról és az agy középvonaláról is. Az ábrán látható két oszcilloszkóp nyom mutatja a hang intenzitását a detektorban az idő függvényében, abban a két esetben, amikor a vizsgáló fejet a beteg fejének bal, illetve a jobb oldalára helyezik.



   Ezekből a grafikonokból egy szakember arra következtetett, hogy ...
   B. a páciens agyának jobb oldala nagyobb, mint a bal oldala.

   Detektor a fej bal oldalán: Rövid idő elteltével megjelenik a középvonal visszhangja. Ha a középvonal visszhangja középen lenne (azaz félidőben a koponya jobb és bal oldalának visszhangja között), akkor a középvonal valóban a fej közepén lenne. De mivel a visszhangot ennél hamarabb látjuk, a középvonalnak közelebb kell lennie a koponya bal oldalához, mint a jobb oldalához.

   Detektor a fej jobb oldalán: Ez a mérés megerősíti az első esetben már levezetett gyanúnkat. A középvonal visszhangját meglehetősen későn látjuk ezen a grafikonon, így a középvonal a jobb oldaltól távolabb van, mint a bal oldaltól.
   Tehát a páciens agyféltekéjének mérete egyenlőtlen és a jobb félteke nagyobb, mint a bal.