XXIII. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára
2019 – MEGOLDÁSOK

Megoldás: 9. oszt./1.

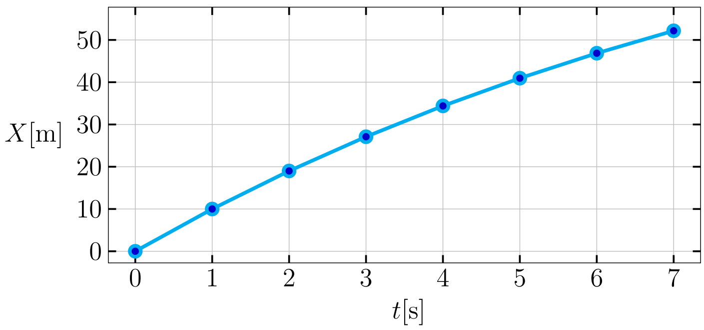
Jelölések & adatok: $s = 50\,\text{m}$, $x_1 = 10\,\text{m}$, $q = 0{,}9$.

1. megoldás. A választ legegyszerűbben táblázattal adhatjuk meg, minden másodpercben kiszámítva a megtett utat (x_i), és az összes addig megtett utat is: $X_i = x_1 + x_2 + \ldots x_i$. Az első másodpercben megtett út $x_1 = 10\,\text{m}$, a következő másodpercben $x_2 = x_1 \cdot 0{,}9$, az n.-dik másodpercben megtett út $x_n = x_1\, 0{,}9^{n-1}$.

idő [s]	megtett út (x_i) [m]	az összes megtett út (X_i) [m]
1.	10	10
2.	9	19
3.	8,1	27,1
4.	7,29	34,39
5.	6,561	40,951
6.	5,9049	46,8559
7.	$\boxed{5{,}31441}$	52,17031

Eszerint valamikor a 6. és 7. másodperc között találkoznak, hiszen a 7. másodperc végig már 50 m-nél több utat tenne meg a futó.

a) A számítások eredményét vázolva:



c) A sebesség definíciója alapján az n-dik másodpercben megtett út számértékben éppen a sebesség. Tehát a találkozáskor a sebességük $v_7 = \underline{\underline{5{,}314\,\text{m/s} = 19{,}131\,\text{km/h}}}$.

b) A 7. másodperc elején még $\Delta s = 50 - 46{,}86 = 3{,}14\,\text{m}$ hiányzik az 50 m-hez. A sebesség állandó a másodpercen belül ($v_7 = 5{,}314\,\text{m/s}$), így a találkozásig még $\Delta t = \dfrac{\Delta s}{v_7} = \dfrac{3{,}14}{5{,}314} = 0{,}59\,\text{s}$ telik el. A találkozás ideje $t = 6 + 0{,}59 = \underline{\underline{6{,}59\,\text{s}}}$.

d) Az átlagsebesség $v_{\text{átl}} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{50}{6{,}59} = \underline{\underline{7{,}59\,\text{m/s} = 27{,}3\,\text{km/h}}}$.

2. megoldás. A találkozásig 50 m utat kell megtenniük, másrészt a megtett út n másodperc alatt $X_n = x_1 + x_2 + \ldots x_i = x_1\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$.
Ez egy mértani sor összege: $X_n = x_1\,\dfrac{1-q^n}{1-q}$, és azt keressük, hogy az összeg mikor éri el az $s = 50$ m-t:

$$50 = 10\,\frac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 = 0{,}9^n. \qquad \text{Innen próbálgatással } n \text{ behatárolható.}$$

Megjegyzés: az egyenletet n-re megoldva $n = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9} = 6{,}57$. Ez pedig szinte pontosan a találkozásig eltelt időt adja.

Megoldás: $\boxed{\text{9. oszt/2.}}$
Jelölések & adatok: $R = 1{,}8\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45°$, $m = 7{,}3\,\mathrm{kg}$, $X = 86{,}75\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.
A golyó pályája ferde hajítás. Mivel az elhajítás szöge 45°, a kezdősebesség vízszintes és függőleges komponense megegyezik, jelöljük v-vel: $v = v_0\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
A vízszintes távolságot egyenletes sebességgel teszi meg: $\boxed{X = v \cdot t}$.
Függőlegesen addig emelkedik, amíg a sebessége 0 nem lesz. Mivel a pálya szimmetrikus az emelkedés ideje $t/2$. Így $\boxed{v - g \cdot t/2 = 0}$.
A két egyenletből t-t kiküszöbölve $X = \dfrac{2v^2}{g}$, ahonnan $v = \sqrt{\dfrac{Xg}{2}}(= 20{,}8\,\mathrm{m/s})$. A kezdősebessége (és egyben a becsapódás sebessége) így $v_0 = \sqrt{2}\cdot\, v = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{Xg}{2}} = \sqrt{Xg}$.
$v_0 = \sqrt{867{,}5}\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{29{,}5\,\mathrm{m/s} = 106\,\mathrm{km/h}}}$.

A kalapácsvető karját húzó erő a centripetális gyorsulás segítségével: $F = m\,\dfrac{v_0^2}{R} = \underline{\underline{3518\,\mathrm{N}}}$.

Megjegyzés: A ferde hajítás maximális távolsága $X = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, ebből $v_0^2 = \dfrac{X\,g}{\sin 2\alpha} = 867{,}5\,\mathrm{m^2/s^2}$.

Megoldás: $\boxed{\text{10. oszt./1.}}$ $\boxed{\text{11. oszt./1.}}$
Jelölések & adatok: $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$, $\alpha = 45°$, $x_0 = 10\,\mathrm{m}$, $h = 2{,}1\,\mathrm{m}$, $\tau = 0{,}3\,\mathrm{s}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Mivel a játékos 45°-os szögben ütötte el a labdát a kezdeti sebesség vízszintes és függőleges komponense azonos: $v_{x0} = v_{y0} = v_0\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

A vízszintesen megtett távolság: $\boxed{X = v_0\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot t}$. A függőlegesen megtett távolság $\boxed{h = v_0\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}t - \dfrac{g}{2}\cdot t^2}$.
Ez utóbbiból az alábbi másodfokú egyenlet adódik t-re, melynek megoldásai:

$$5\,t^2 - 15\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,t + 2{,}1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}22 \qquad t_2 = 1{,}90.$$

Ezek közül a nagyobb tartozik a pálya leszálló ágához: $\boxed{t = 1{,}90\,\mathrm{s}}$.
A vízszintesen megtett távolság: $X = v_0\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot t = \dfrac{15}{\sqrt{2}}\cdot 1{,}90 = \boxed{20{,}16\,\mathrm{m}}$

Az ellenfélnek így $x = X - x_0 = 20{,}16 - 10 = 10{,}16\,\text{m}$-t kell $t - \tau = 1{,}9 - 0{,}3 = 1{,}6\,\text{s}$ alatt futnia.

Az átlagsebessége tehát: $v_{\text{átl}} = \dfrac{10{,}16\,\text{m}}{1{,}6\,\text{s}} = \underline{\underline{6{,}35\,\text{m/s} = 22{,}8\,\text{km/h}}}$

Megoldás: $\boxed{\text{9 oszt./3.}}$ $\boxed{\text{10. oszt./2.}}$ $\boxed{\text{11. oszt./2.}}$ $\boxed{\text{12. oszt./2.}}$

Jelölések & adatok: $h_0 = 1{,}05\,\text{m}$, $h_1 = 0{,}57\,\text{m}$, $m = 0{,}6\,\text{kg}$, $x = 0{,}08\,\text{m}$, $g = 10\,\text{m/s}^2$.

a) $\Delta E = mgh_0 - mgh_1 = mg(h_0 - h_1) = 0{,}6 \cdot 10 \cdot (1{,}05 - 0{,}57) = \underline{\underline{2{,}88\,\text{J}}}$ az energiaveszteség.

b) Nem teljesen rugalmas ütközésre jellemző az ütközési szám: $k = \dfrac{v_1}{v_0}$.

Energia megmaradásból a földetérés sebességére $\dfrac{1}{2} m\, v_0^2 = mgh_0$, míg a visszapattanás sebességére $\dfrac{1}{2} m\, v_1^2 = mgh_1$. Ezek arányából pedig $k^2 = \dfrac{v_1^2}{v_0^2} = \dfrac{h_1}{h_0} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\dfrac{h_1}{h_0}} = \underline{\underline{0{,}737}}$.

[$v_0 = \sqrt{2gh_0} = 4{,}58\,\text{m/s}$, $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 3{,}38\,\text{m/s}$.]

c) Könnyű volna azt válaszolni, hogy $\Delta E = F \cdot x$, azaz az energiaveszteséget az F erő munkája kompenzálja, csakhogy a veszteséget a padlóval való ütközés rugalmatlansága okozza, így az energiaveszteség annál nagyobb, minél nagyobb volt a földetérés sebessége. Így a gyors válasz téves.

Tegyük fel, hogy a padlót most u sebességgel éri el a labda. Másrészt tudjuk, hogy h_0 magasságra pattan vissza, így most v_0 lesz a visszapattanás sebessége. A sebességek arányára fennáll, hogy $k^2 = \dfrac{h_1}{h_0} = \dfrac{v_0^2}{u^2}$.

Munkatétellel $F \cdot x + mgh_0 = \dfrac{1}{2} mu^2$. Az ütközési feltételből $u^2 = \dfrac{h_0}{h} v_0^2 = \dfrac{h_0}{h} 2gh_0$.

Ezt behelyettesítve a munka tételből kapott egyenlet jobb oldalára: $F \cdot x + mgh_0 = mgh_0 \dfrac{h_0}{h}$.

Innen pedig az erő kifejezhető: $F = \dfrac{mgh_0}{x} \left(\dfrac{h_0}{h} - 1 \right) = \dfrac{0{,}6 \cdot 10 \cdot 1{,}05}{0{,}08} \left(\dfrac{1{,}05}{0{,}57} - 1 \right) = \underline{\underline{66\,\text{N}}}$.

1. Megjegyzés: Természetesen v_0 ismeretében u már visszaszámolható: $u = \dfrac{v_0}{k} = \dfrac{4{,}58\,\text{m/s}}{0{,}737} = 6{,}21\,\text{m/s}$. A munkatételből: $F = \dfrac{m}{x} \left(\dfrac{1}{2} u^2 - gh_0 \right) = \dfrac{0{,}6}{0{,}08} \left(\dfrac{1}{2} \cdot 6{,}21^2 - 10 \cdot 1{,}05 \right) = 66\,\text{N}$

2. Megjegyzés: A téves esetben $F = \dfrac{\Delta E}{x} = \dfrac{2{,}88}{0{,}08} = 36\,\text{N}$ az eredmény.

Megoldás: $\boxed{\text{10. oszt./3.}}$

Jelölések & adatok: $d = 0{,}2\,\text{m}$, $F = 1{,}2\,\text{N}$ és $k = 9 \cdot 10^9\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ a Coulomb-törvényben szereplő állandó.

A testeknek a vonzóerő miatt ellenkező előjelű töltésük volt: q_1 illetve $-q_2$.

Összeérintés után a töltések újra eloszlanak a testeken úgy, hogy azonos lesz a két test töltése (pozitív vagy negatív azt nem tudjuk): $2q = q_1 - q_2$.

Az összeérintés után föllépő Coulomb-erő $F = k\,\dfrac{q^2}{d^2}$, ahonnan átrendezéssel adódik a töltés:

$q^2 = \dfrac{F \cdot d^2}{k} = \dfrac{1,2 \cdot 0,2^2}{9 \cdot 10^9} = 5{,}33 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad q = \pm 2{,}3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}.$

Az eredeti töltésekre fennáll, hogy $\boxed{q_1 \cdot q_2 = \dfrac{F \cdot d^2}{k} = q^2}$, illetve $\boxed{2q = q_1 - q_2}$.

Ez másodfokú egyenletre vezet. A második egyenletből kifejezve a q_1 töltést: $q_1 = 2q + q_2$, majd behelyettesítve az elsőbe: $q_1 \cdot q_2 = (2q + q_2) \cdot q_2 = q_2^2 + 2q \cdot q_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_2^2 + 2q \cdot q_2 - q^2 = 0}$.

Ennek két megoldása egyszerűsítés után $(q_2)_{12} = -q \pm q\sqrt{2}$,

Ahonnan első lehetőségként $q_2 = q(\sqrt{2} - 1) = \boxed{0{,}41\,q}$ és $q_1 = 2q + q(\sqrt{2} - 1) = q(\sqrt{2} + 1) = \boxed{2{,}41\,q}$.

Vagy $q_2 = -q(\sqrt{2} + 1) = \boxed{-2{,}41\,q}$ és $q_1 = 2q - q(\sqrt{2} + 1) = -q(\sqrt{2} - 1) = \boxed{-0{,}41\,q}$.

Tehát az eredeti töltések $\underline{\underline{0{,}943 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \text{ és } -5{,}543 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}}$, vagy $\underline{\underline{-0{,}943 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \text{ és } 5{,}543 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}}$.

Megoldás: $\boxed{\text{11. oszt./3.}}$

Jelölések & adatok: $\rho = 88 \cdot 10^{-8}\Omega\,\mathrm{m}$, $U = 12\,\mathrm{V}$, $n = 13$, $l = 1{,}3\,\mathrm{m}$, $m = 2{,}1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}$, $t = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$, $L_\mathrm{o} = 334{,}96\,\mathrm{kJ/kg}$, $c = 2093{,}5\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}$, $\Delta T = 10\,{}^\circ\mathrm{C}$.

a) Az olvasztáshoz szükséges hő $Q = m\,L_\mathrm{o} = 2{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 334{,}96 \cdot 10^3\,\mathrm{J} = 7034\,\mathrm{J}$.

Az olvasztás teljesítménye: $P = \dfrac{Q}{t} = \dfrac{7034}{120} = 58{,}6\,\mathrm{W}$.

Ez ha a veszteségeket elhanyagoljuk, akkor megegyezik az elektromos teljesítménnyel ahonnan meghatározható a rendszer eredő ellenállása

$$P = \frac{U^2}{R_\mathrm{E}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{E} = \frac{U^2}{P} = \frac{12^2}{58{,}6} = 2{,}46\,\Omega\,.$$

Egyforma vezetékdarabok vannak párhuzamosan kötve ($R_\mathrm{E} = \frac{R}{n}$), így egyetlen vezetékdarab ellenállása: $R = n\,R_\mathrm{E} = 31{,}9\,\Omega$.

Kihasználva, hogy a vezetékdarab ellenállása $R = \dfrac{\rho\,l}{A}$, a vezeték keresztmetszete:

$A = \dfrac{\rho\,l}{R} = \dfrac{88 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}3}{31{,}9} = 3{,}58 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^2 = 0{,}0358\,\mathrm{mm}^2$.

Az átmérő pedig $A = \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 \pi$ alapján: $d = \sqrt{\dfrac{4A}{\pi}} = \underline{\underline{2{,}14 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0{,}214\,\mathrm{mm}}}$

Másik megoldás – formulával kifejezve A jégtelenítő párhuzamosan kapcsolt vezetékeinek eredő ellenállása: $R_\mathrm{E} = \dfrac{\rho\,l}{A\,n}$.

Az elektromos munka $W = \dfrac{U^2}{R_\mathrm{E}}\,t = \dfrac{U^2\;A\,n}{\rho\,l}\,t$, amely megegyezik Q-val.

Ahonnan a vezeték keresztmetszetének területe: $A = \dfrac{Q\,\rho\,l}{U^2\,n\,t} = 3{,}58 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^2$.

c) Egy vezeték ellenállása kerekítve $31{,}9\,\Omega$, a vezetéken átfolyó áram $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{12}{31{,}9} = \underline{\underline{0{,}375\,\mathrm{A}}}$.

b) A jég felmelegítéséhez szükséges hő $Q_j = c_j\, m\, \Delta T = 2{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 2093,5 \cdot 10 = 439{,}6\,\mathrm{J}$, így az összesen szükséges hőmennyiség $Q_{\text{össz}} = Q + Q_j = 7473{,}6\,\mathrm{J}$.

A szükséges idő: $t' = \dfrac{Q_{\text{össz}}}{P} = \underline{\underline{127{,}5\,\mathrm{s} = 2{,}1\,\mathrm{perc}}}$.

Megoldás: $\boxed{\text{12. oszt./1.}}$

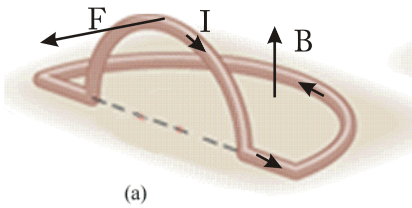
Jelölések & adatok: $B = 0{,}35\,\mathrm{T}$, $R = 0{,}025\,\Omega$, $r_1 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$.

a) A tekercsen átmenő fluxus $\Phi_m = B \cdot A$ módon számolható, ahol A a tekercs által körbezárt felület, erővonalakra merőleges síkra vett vetülete. Világos, hogy ez a vetület a kis félkör függőleges helyzeténél lesz nagyobb. Hiszen ekkor $A_{(\mathrm{a})} = \frac{1}{2}\, r_2^2 \pi$. Míg vízszintes helyzetben $A_{(\mathrm{b})} = \frac{1}{2}(r_2^2\pi - r_1^2\pi)$.

b) Az indukált feszültség nagysága $U_{\mathrm{i}} = \dfrac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} = B\,\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$, ahol a terület változás a kis félkör területe $\Delta A = \dfrac{1}{2}\, r_1^2\pi (= 0{,}0628\,\mathrm{m}^2)$.

Így $U_{\mathrm{i}} = B\,\dfrac{r_1^2\,\pi}{2\,\Delta t} = 0{,}35\,\dfrac{0{,}2^2\,\pi}{2 \cdot 1} = 0{,}022\,\mathrm{V}$. Az áramerősség $I = \dfrac{U_{\mathrm{i}}}{R} = 0{,}8796\,\mathrm{A} = \underline{\underline{0{,}88\,\mathrm{A}}}$.

Az áram iránya: A leforduló félkörre olyan irányú mágneses erő $(F = B\,I\,l)$ hat, amely próbálja visszaforgatni a félkört. Ennek iránya az ábra szerint a kis félkörben az óramutató járásával megegyező, a nagy félkörben az óramutató járásával ellentétes irányú.



(a)

c) Állandó szögsebességű forgatásnál a megadott 1 s éppen a periódus egynegyede, így a periódus idő $T = 4\,\mathrm{s}$, azaz a szögsebesség $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1{,}57\,\mathrm{s}$.

Az indukált feszültség $U_{\mathrm{i}} = B\,\dfrac{dA}{dt}$, a változást a kis félkör területének vízszintes vetületéből kell számolni.

A vízszintes vetület $A = \dfrac{1}{2} r_1^2\pi \cdot \sin\omega t$, így az indukált feszültség $U_i = \dfrac{1}{2} B r_1^2 \pi\omega\cos\omega t$, mintha váltakozó feszültség előállításáról lenne szó forgó tekerccsel. Az áram a kiinduló esetben maximális, értéke $I = \dfrac{U_{i,max}}{R} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{B r_1^2\pi\omega}{R} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{B r_1^2\pi\omega}{R} = \underline{\underline{1{,}38\,\mathrm{A}}}$.

Megjegyzés A b) kérdésre adott válasz annak felel meg, hogy a kis félkör vízszintes területe egyenletes sebességgel nő. Kiszámíthatjuk, hogy az állandó szögsebességű forgásnál az alábbi átlagsebességgel változik a vetület területe:

$$\frac{4}{T}\int_0^{T/4} \sin\omega t\; dt = \frac{4}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{T/4} = \frac{4}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot 1 = \frac{2}{\pi} = 0{,}637$$

Ennek alapján a c) pontbeli harmonikusan változó áramerősség negyed periódusra vett átlagértéke $I_{\text{átl}} = 1{,}38 \cdot 0{,}637 = 0{,}88\,\mathrm{A}$.

Megoldás: $\boxed{\text{12. oszt./3.}}$
Jelölések & adatok: Adatok: $k_{\text{Nap}} = 0{,}9\,\text{m}$, $k = 0{,}91\,\text{m}$, $K = 0{,}12\,\text{m}$.

a) A méréshez valódi képre van szükségünk, így konvex, azaz domború lencse kell.

b) A Nap sugarai párhuzamosan esnek a lencsére, ilyenkor a fókuszpontban keletkezik a kép. Tehát a lencse fókusztávolsága: $f = k_{\text{Nap}} = 0{,}9\,\text{m}$.

A képalkotási törvény szerint: $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{k}$.

Ebből $t = \dfrac{k \cdot f}{k - f} = \dfrac{0{,}91 \cdot 0{,}9}{0{,}91 - 0{,}9} = 81{,}9\,\text{m}$. Tehát a fa távolsága a lencsétől 81,9 m.

A nagyítás alapján a tárgy mérete $T = t\,\dfrac{K}{k} = 81{,}9 \cdot \dfrac{0{,}12}{0{,}91} = 10{,}8\,\text{m}$. Ilyen magas a fa.

Megoldás: $\boxed{\text{9. oszt./4.}}$ Mielőtt a teszt kérdésekre választ adunk, végezzünk el néhány számítást.

I. eset – gumilabda: Rugalmas ütközés.
Kezdetben: $v_1 = V$, $v_2 = 0$. A rendszer összes lendülete: $p = m\,V$.
Ütközés után $u_1 = -V/3$, $u_2 = ?$. A rendszer összes lendülete: $p' = -m\,\dfrac{V}{3} + M\,u_2$.

A lendületmegmaradás alapján: $m\,V = -m\,\dfrac{V}{3} + M\,u_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_2 = \dfrac{4}{3}\,\dfrac{m}{M}\,V}$

Behelyettesítve: $u_2 = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{2}\,V = \boxed{\dfrac{2}{3}\,V}$

II. eset – gyurmalabda: Rugalmatlan ütközés.
Kezdetben: $v_1 = V$, $v_2 = 0$. A rendszer összes lendülete: $p = m\,V$.
Ütközés után együtt mozognak, így $u_1 = u_2 = u = ?$. A rendszer összes lendülete: $p' = (m + M)\,u$.

A lendületmegmaradás alapján: $m\,V = (m + M)\,u \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \dfrac{1}{1 + M/m}\,V}$

Behelyettesítve: $u = \dfrac{1}{1 + 2}\,V = \boxed{\dfrac{1}{3}\,V}$.

1. Mekkora végsebességre tesz szert a doboz a gumilabda dobásakor?
   $\boxed{\text{C.}\quad 2\,V/3.}$ A számítások alapján egyértelmű.

2. A gyurmalabda dobásakor az alábbi lehetőségek közül melyik duplázná meg a doboz ütközés utáni lendületét?
   $\boxed{\text{A.}\quad \text{A labda kezdeti } V \text{ sebességének megduplázása.}}$

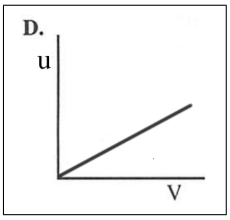
   A levezetett $u = \dfrac{1}{1 + M/m}\,V$ formula alapján látszik, hogy a kezdeti sebesség duplázása jó lesz.

   A tömeg arány megváltoztatása pedig más típusú változást hozna.

   M megduplázása: $u = \dfrac{1}{1 + 4}\,V = V/5$

   m megduplázása vagy M tömegének felére csökkentése: $u = \dfrac{1}{1 + 1}\,V = V/2$

3. A gyurmalabda esetében az ütközést követően a doboz és a gyurmalabda együtt mozognak tovább, közös u sebességgel. Az alábbi grafikonok közül melyik adja vissza legjobban a u és a labda kezdeti V sebessége közötti kapcsolatot?



A levezetett $u = \dfrac{1}{1 + M/m} V$ formula alapján látszik a lineáris kapcsolat. Tehát a grafikon egyenes, mégpedig olyan, amely az origón átmegy és növekvő V-hez növekvő u-t rendel.

4. Melyik labda okoz nagyobb lendületváltozást a dobozon?

C. A gumilabda nagyobb lendületváltozást okoz a dobozon.

A gumilabda esetén lesz nagyobb a doboz sebessége ($2V/3 > V/3$) és így a doboz lendületváltozása is.

Megoldás: 10. oszt./4.

Jelölések & adatok: $d = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $\delta = 10^{-5}\,\mathrm{m}$, $T_0 = 25\,°\mathrm{C}$.

Mielőtt a teszt kérdésekre választ adunk, végezzünk el néhány számítást.
A golyó átfér a lyukon, ha ΔT hőmérséklet-változás hatására az átmérők megegyeznek. A lyuk átmérője $d(1 + \alpha_1 \Delta T)$, a golyó átmérője $(d + \delta)(1 + \alpha_2 \Delta T)$, így:

$d(1 + \alpha_1 \Delta T) = (d + \delta)(1 + \alpha_2 \Delta T) \quad \Rightarrow \quad d + d\,\alpha_1 \Delta T = d + \delta + (d + \delta)\alpha_2 \Delta T$

$$\Delta T = \frac{\delta}{d\,\alpha_1 - (d + \delta)\alpha_2} = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{0{,}1\alpha_1 - 0{,}10001 \cdot \alpha_2} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{\alpha_1 - 1{,}0001 \cdot \alpha_2} \approx \frac{100 \cdot 10^{-6}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Behelyettesítve látjuk, hogy ilyen adatok mellett a nevező jó közelítéssel $\alpha_1 - \alpha_2$.

Készítsünk segédtáblázatot, a lineáris hőtágulási együtthatók mértékegysége $10^{-6}\,°\mathrm{C}^{-1}$.

elrendezés	α_1(lemez)	α_2 (golyó)	$\alpha_1 - \alpha_2$	ΔT [°C]	α_1/α_2
ólom-arany	28	14	14	7,14	2
alumínium-acél	24	12	12	8,33	2
ezüst-porcelán	20	3	17	5,88	6,67

1. Mi a feltétele ilyen adatok mellett, hogy a golyó átessen a lyukon?

   A ΔT-re kapott közelítő formula alapján $\alpha_1 > \alpha_2$.

   Tehát a lemez lineáris hőtágulási együtthatója legyen nagyobb, mint a golyóé.

   A. igaz

   B. hamis

   C. hamis. – Ezt a feltételt teljesítik a megadott adatok, de nem ez a feltétele az átesésnek.

2. Melegítés esetén mi lesz a golyók átesési sorrendje?

   A táblázatban látható kiszámolt értékek alapján: 1. porcelán, 2. arany, 3. acél.

   A. igaz

   B. hamis. Önmagában a lemez hőtágulásának mértéke nem elég.

   C. hamis. Mivel $\Delta T \approx \dfrac{100 \cdot 10^{-6}}{\alpha_1/\alpha_2 - 1}\alpha_2$, önmagában a hányadosok értéke nem elég.

3. Hajtsuk végre ugyanezt a kísérletet, de most legyen a golyók átmérője $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ m-rel nagyobb a változatlan méretű lyukakhoz képest. Az alábbi állítások közül melyik igaz ebben az esetben?

   $\delta' = 500 \cdot 10^{-6}$ m. Az átesési hőmérséklet most:

$$\Delta T = \frac{\delta'}{d\,\alpha_1 - (d+\delta')\alpha_2} = \frac{500 \cdot 10^{-6}}{0{,}1\alpha_1 - 0{,}1005 \cdot \alpha_2} = \frac{5000 \cdot 10^{-6}}{\alpha_1 - 1{,}005 \cdot \alpha_2} \approx \frac{5000 \cdot 10^{-6}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

   Ismét segédtáblázatot készítve, a lineáris hőtágulási együtthatók mértékegysége $10^{-6}\,°\mathrm{C}^{-1}$.

elrendezés	α_1(lemez)	α_2 (golyó)	$\alpha_1 - \alpha_2$	ΔT [°C]	$T_0 + \Delta T$ [°C]
ólom-arany	28	14	14	357 (!!!)	382 (!!!)
alumínium-acél	24	12	12	417	442
ezüst-porcelán	20	3	17	294	319

   Mivel az ólom olvadáspontja 327 °C, így az ólomlemez hamarabb elolvad, minthogy a golyó átesett volna.

   A. hamis. A melegítési hőmérséklet az átmérők különbségével arányos.

   B. igaz. Bár az aranygolyó az ólomlemez megolvadása miatt 302 °C hőmérséklet különbségnél, azaz 327 °C-on már leesett, de ez a sorrendet nem befolyásolja.

   C. hamis. mivel az ólom addigra megolvad, így az arany ennél hamarabb „átesik”.

Megoldás: 11. oszt./4. 12. oszt./4.

1. Az ütközés után mennyire nyomódik össze a rugó?

   D. $A = \dfrac{m_1\,v_1}{\sqrt{D(m_1+m_2)}}$.

   A testek rugalmatlan ütközésére érvényes a lendületmegmaradás.

   $m_1 v_1 = (m_1+m_2)u \quad\Rightarrow\quad u = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\,v_1.$

   A rugó maximális összenyomódását az energiamegmaradásból számíthatjuk ki:

   $\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)\,u^2 = \dfrac{1}{2}\,D\,A^2.$

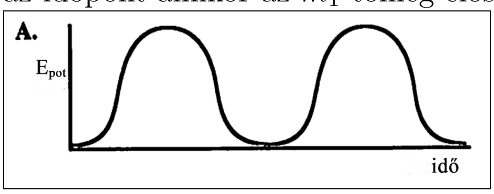
   Behelyettesítve u értékét és az A maximális kitérést kifejezve: $\boxed{A = \dfrac{m_1 v_1}{\sqrt{D(m_1+m_2)}}}$.

2. Tekintsük a két test és a rugó lendületét és energiáját közvetlenül az ütközés előtt és után:

   C. a lendület megmarad, de teljes energia nem marad meg.

   Rugalmatlan ütközésről van szó: Az ütközés előtti és utáni helyzetre a lendület megmaradás igaz, de az energia megmaradás nem.

3. Melyik grafikon írja le legjobban a rendszer potenciális energiájának idő függését, ha $t = 0$ az az időpont amikor az m_1 tömeg először ütközik az m_2 tömegnek:



   A feltételek szerint szerint $t = 0$ időpontban a kitérés nulla, a sebesség maximális. Így a létrejövő harmonikus rezgés kitérés-idő függvénye: $x(t) = A\sin\omega t$.

A potenciális energia tetszőleges időpontban:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\sin^2\omega t = \frac{1}{4}DA^2(1-\cos 2\omega t)$$

Ennek grafikonja az **A.** ábra.

4. Tegyük fel, hogy súrlódás is föllép a tömegek és a vízszintes felület közt. Ekkor

   I. a rugó kevésbé fog összenyomódni.
   II. az ütközés után ugyan annyi lesz a tömegek kinetikus energiája, mint a súrlódásmentes esetben.
   III. az ütközést követően a rezgésbe jövő tömegek egyre kisebb sebességgel haladnak át az egyensúlyi helyzeten.

   B. Csak I. és III. igaz

   Ha van súrlódás, akkor az m_1 test v_1 -nél kisebb sebességgel ütközik m_2 testnek, ezért kisebb lesz az ütközés utáni közös sebesség, és ennek megfelelően a kinetikus energia is (II. hamis). A rugó ennek következtében kevésbé fog összenyomódni (I. igaz). A súrlódás miatt csillapodó harmonikus rezgőmozgás jön létre, így III. is igaz.