9. évf. 1. feladat.

A feladatban szereplő mennyiségek:

$$\Delta t = 10\,s; l = 700\,m$$

$$v_{1_0} = v_{2_0} = 30\,\frac{m}{s}$$ (1 pont)

$$v_{1_m} = 85\,\frac{m}{s}; v_{2_m} = 90\,\frac{m}{s}; v_{2_m}' = 93\,\frac{1}{3}\,\frac{m}{s}$$ (1 pont)

Az egyenletesen változó sebességű mozgás definíciója alapján:

$$a_1 = \frac{v_{1_m} - v_{1_0}}{\Delta t} = 5{,}5\,\frac{m}{s^2}; a_2 = \frac{v_{2_m} - v_{2_0}}{\Delta t} = 6\,\frac{m}{s^2}; a_2' = \frac{v_{2_m}' - v_{2_0}}{\Delta t} = 6\,\frac{1}{3}\,\frac{m}{s^2}$$ (1 pont)

a) Mivel a végsebességet a megadott Δt idő alatt érik el, így felírva az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásra tanult út-idő összefüggést: (2 pont)

$$s_1(\Delta t) = v_{1_0} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \Delta t^2 = 575\,m$$ (képlet: 1 pont+ számolás: 1 pont)

$$s_2'(\Delta t) = v_{2_0} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_2' \cdot \Delta t^2 = 616\,\frac{2}{3}\,m$$ (1 pont)

b) A célegyenes további, fékezésmentes részét ezzel a sebességgel teszik meg. (1 pont)

A Δt időhöz a hátramaradt fékezésmentes szakasz megtételéhez szükséges időt kell hozzáadni:

$$t_1 = \Delta t + \frac{l - s_1}{v_{1_m}} = 11{,}47\,s$$ (1+1 pont)

$$t_2' = \Delta t + \frac{l - s_2'}{v_{2_m}'} = 10{,}89\,s$$ (1 pont)

c) A DRS nélkül ugyanez a számolás:

$$s_2\,(\Delta t) = v_{2_0} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \Delta t^2 = 600\,m$$ (1 pont)

$$t_2 = \Delta t + \frac{l - s_2}{v_{2_m}} = 11{,}11\,s$$ (1 pont)

Azaz a DRS biztosította előny 0,22 s. (1 pont)

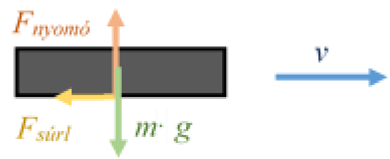
d) Azt látjuk, hogy a 0,5 mp-s lemaradás helyett a célegyenes végére 0,08 mp-vel vezet (1 pont) a második versenyző. Ahhoz, hogy megtudjuk, hány méter az előnye, azt kell kiszámolnunk, hogy a 0,08 mp alatt mekkora távolságot tesz meg az elölről induló versenyző. (2 pont)

$$\Delta s = 0{,}0777 \cdot 85 = 6{,}6\,m.$$ (1 pont)

Ez kevesebb, mint a két autó hossza, így az előzés nem megy végbe teljesen a fékezési szakasz elértéig. (1 pont)

9. évf. 2. feladat.

A meglökött jégkorong sebessége $44\frac{4}{9}\frac{m}{s}$. (1 pont)
A jégkorongra ható erőket a jobb oldali ábrán láthatjuk.
Felírva a jégkorong mozgására a dinamika alapegyenletét (2 pont) függőleges (y) és vízszintes (x) irányban:



(3 pont)

$$(y): m \cdot a_y = F_{nyomó} - m \cdot g = 0 \qquad \text{(1 pont)}$$

$$(x): m \cdot a_x = -F_{súrl} = -\mu_s \cdot F_{nyomó} = -\mu_s \cdot m \cdot g \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\rightarrow a_x = -\mu_s \cdot g = -0{,}981\frac{m}{s^2} \qquad \text{(1 pont)}$$

Azaz ennek segítségével kaphatjuk, hogy:

$$v_x + a_x \cdot t_{mozg} = 0 \rightarrow t_{mozg} = -\frac{v_x}{a_x} \qquad \text{(1+0,5 pont)}$$

$$s_{csúsz} = v_x \cdot t_{mozg} + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t_{mozg}^2 = \frac{v_x^2}{\mu_s \cdot g} \cdot \frac{1}{2} = 1006\, m \approx 1\, km \qquad \text{(1+0,5 pont)}$$

Azaz akár 1 km-t is csúszhat ideális körülmények között a pakk. Ezt valós körülmények között limitálja pl. a légellenállás, a csúszási súrlódás sebességfüggése, stb; azonban nagyságrendileg akkor is helytálló marad a becslésünk, ha ezeket figyelembe vesszük.

b) Egy átlagos korong súlya 1,5 N. Így egy átlagos korong tömege:

$$m = \frac{G}{g} = 153\ \ gr \qquad \text{(1+0,5 pont)}$$

Így, ha 160 km/h-val lökik meg, a lendülete:

$$I = m \cdot v = 0{,}153 \cdot 44\frac{4}{9} = 6{,}8\, kg \cdot \frac{m}{s} \qquad \text{(1+0,5 pont)}$$

A korongnak 0,01 mp-ig tartó erőlökés adott ekkora lendületet. Hanyagoljuk el a súrlódást! Ezt megtehetjük, hiszen az előző feladatban a korong 45 mp-is csúszott, míg itt 0,01 s alatt kapja meg ugyanazt a lendületet. Így az erőlökésből kiszámolható a korongot gyorsító erő:

$$F \cdot \Delta t = I \rightarrow F = \frac{I}{\Delta t} = 680\, N \qquad \text{(1 pont)}$$

c) Ismerjük a korong lassulását. Számoljuk ki azt, hogy mekkora sebességgel kell meglökni a lassuló korongot, hogy az adott időtartam alatt a kapuban legyen! Jelöljük a kapus reakcióidejét T-vel; a csatár kapustól mért távolságát s-sel.

$$v_0 \cdot T - \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot g \cdot T^2 = s \rightarrow v_0 = \frac{s + \frac{1}{2}\mu \cdot g \cdot T^2}{T} = 33{,}4\frac{m}{s} = 120\frac{km}{h} \qquad \text{(1 pont)}$$

d) Az előző feladatrészek alapján:

$$F = \frac{m \cdot v_0}{\Delta t} = 511\, N \qquad \text{(1 pont)}$$

e) Ha nem vesszük figyelembe a súrlódást, azaz μ=0, akkor:

$$v_0' = \frac{s+\frac{1}{2}\cdot 0\cdot T^2}{T} = 33\frac{1}{3}\,\frac{m}{s} = 120\,\frac{km}{h} = \frac{1}{1{,}022}\cdot v_{súrl}$$ (1 pont)

A szükséges erő is hasonló mértékben fog változni:

$$F' = \frac{m\cdot v_0'}{\Delta t} = \frac{1}{1{,}022}\cdot F_{súrl} = 511\ N$$ (1 pont)

Az eredmény nem változik; hiszen a súrlódás elhanyagolható az erő nagyságához képest; ezt korábban meg is indokoltuk.

9. évf. 3. feladat.

a) Az első ütközés a lövedék és az m_1 tömegű test között zajlik le. A golyó belefúródik a testbe, így az ütközés rugalmatlannak tekinthető. A lendületmegmaradás tétele szerint írhatjuk le a folyamatot. A lövedék és az m_1 tömegű test az m_2 tömegű test irányába mozdul el, aminek következtében a kötél meglazul, de m_2 és m_3 tömegű testek egyelőre mozdulatlanok maradnak.

A lendületmegmaradás értelmében: $m_0 v_0 = (m_0 + m_1) v_1$ (2 pont)

Ebből $v_1 = \frac{m_0 v_0}{m_0 + m_1} = 11{,}43\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 3{,}18\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (3 pont)

A következő ütközésben a lövedéket tartalmazó test rugalmasan ütközik az m_2 tömegű testtel, sebességét jelöljük az ütközés után v_2-vel. Az m_2 és m_3 tömegű testek merev rúddal vannak összekötve, így az m_3 tömegű test azonnal felveszi az m_2 tömegű test sebességét, v_3-at.

Ismét a lendületmegmaradás szerint: $(m_0 + m_1) v_1 = (m_0 + m_1) v_2 + (m_2 + m_3) v_3$ (2 pont)

Az ütközés rugalmas jellege miatt a mozgási energia is megmarad:

$$\frac{1}{2}(m_0 + m_1) v_1^2 = \frac{1}{2}(m_0 + m_1) v_2^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3) v_3^2$$ (2 pont)

A két egyenletből kifejezhető, hogy

$$v_3 = \frac{2v_1}{\frac{m_2 + m_3}{m_0 + m_1} + 1} = 1{,}07\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(= 3{,}84\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right),$$ (3 pont)

illetve $v_2 = v_1 - \frac{m_2 + m_3}{m_0 + m_1} v_3 = -2{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(= -7{,}59\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

A rendszer végleges sebességének beálltakor mindhárom test azonos sebességgel halad. A lendület végig megmarad a mozgás során, így felírhatjuk, hogy

$v_4 = \dfrac{m_0 v_0}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}53\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\left(=1{,}92\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ (3 pont)

Az m_2 tömegű test sebessége az első ütközést követően 1,07 m/s, a míg a végleges sebessége 0,53 m/s.

b) Az első fázisban lövedék rendelkezik a rendszer összes mozgási energiájával:

$E_0 = \dfrac{1}{2} m_0 v_0^2 = 640\ \text{J}$ (1 pont)

A második fázisban a lövedék és az m_1 tömegű test közös mozgási energiája:

$E_1 = \dfrac{1}{2}\left(m_0 + m_1\right) v_1^2 = 5{,}08\ \text{J}$ (1 pont)

A 634,9 J-nyi energiakülönbözet a lövedék és a kocka rugalmatlan alakváltozására fordítódik, ami kismértékben hővé is alakul, de rugalmas energiaként nem tárolódik. (1 pont)

Az m_1 és m_2 tömegű testek ütközése rugalmas, így nincs veszteség mozgási energia tekintetében.

A végső fázis mozgási energiája:

$E_4 = \dfrac{1}{2}\left(m_0 + m_1 + m_2 + m_3\right) v_4^2 = 0{,}85\ \text{J}$ (1 pont)

A 4.23 J különbözet a kötél rugalmatlan alakváltozására fordítódik, amely – mivel szintén nem tárolódik rugalmas energia formájában – nem alakul vissza mozgási energiává. (1 pont)

9. évf. 4. feladat.

a) A mozgási időt t = 3,45 s-nak mérjük, a megtett út h = 3 m. Ebből a gyorsulásra

$h = \dfrac{1}{2} a t^2$ alapján $a = \dfrac{2h}{t^2} = 0{,}5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ adódik. (1 pont)

Az elengedés után mindkét test ezzel a gyorsulással mozog, mindkettőre hat a nehézségi erő és az acélhuzal révén megegyező nagyságú T tartóerő. A két mozgásegyenlet:

$m_1 a = m_1 g - T$, illetve $m_2 a = T - m_2 g$. (2 pont)

Ezeket egymásból kivonva a g nehézségi gyorsulásra azt kapjuk, hogy $g = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} a = \underline{\underline{9{,}58\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$.

(1 pont)

A helyes válasz a **C**. (1 pont)

b) Számoljuk ki a gyorsulások értékeit *t'* = 3,35 s esetére is:

$a' = 0{,}54\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, illetve $g' = 10{,}16\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. (2 pont)

A mért értékünkhöz képest ez $\left|\frac{g'-g}{g}\right| = \left|\frac{10{,}16\ \text{m/s}^2 - 9{,}58\ \text{m/s}^2}{9{,}58\ \text{m/s}^2}\right| = \underline{\underline{6\%}}$ eltérést jelent. (2 pont)

A helyes válasz a **D**. (1 pont)

c) A mozgás közben az acélhuzalban fellépő erő számolható az a) részben felírt mozgásegyenletek egyikéből: (1 pont)

$T = m_1 g - m_1 a = 10\ \text{kg}\cdot 9{,}58\ \text{m/s}^2 - 10\ \text{kg}\cdot 0{,}5\ \text{m/s}^2 \approx \underline{\underline{91\ \text{N}}}$ (3 pont)

A helyes válasz a **B**. (1 pont)

d) A mozgás elindítása előtt a huzalban feszülő erő az m_1 tömegű test nehézségi erejével egyezik meg: $T_0 = m_1 g = 10\ \text{kg}\cdot 9{,}58\ \text{m/s}^2 \approx 96\ \text{N}$. (1 pont)

A megnyúlt huzal hossza ekkor $L = L_0 + \Delta L$, ahol L_0 a nyújtatlan hossz. (1 pont)

Az ennek megfelelő rugalmas hosszváltozás a Hooke-törvény szerint:

$\Delta L = \frac{T_0\cdot L_0}{A\cdot E} = \frac{T_0\cdot(L-\Delta L)}{A\cdot E}$, amiből (1 pont)

$$\Delta L = \frac{\frac{T_0\cdot L}{A\cdot E}}{1+\frac{T_0}{A\cdot E}} = \frac{\frac{96\ \text{N}\cdot 4\ \text{m}}{\left(2\cdot 10^{-4}\text{m}/2\right)^2\pi\cdot 2\cdot 10^{11}\text{Pa}}}{1+\frac{96\ \text{N}}{\left(2\cdot 10^{-4}\text{m}/2\right)^2\pi\cdot 2\cdot 10^{11}\text{Pa}}} = 60\ \text{mm}$$ (1 pont)

A relatív megnyúlás: $\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{60\ \text{mm}}{4\ \text{m} - 60\ \text{mm}} = \frac{60\ \text{mm}}{3940\ \text{mm}} = 1{,}523\% \approx 1{,}5\%$

A helyes válasz a **C**. (1 pont)

10. évf. 1. feladat.

a) Jelölje α a lejtő szögét. A lejtőre a jól ismert súrlódásmentes mozgásegyenletet írhatjuk fel. A test gyorsulása az első szakaszon $a = g\sin\alpha$, míg a másodikon ugyanilyen nagyságú, de ellentétes előjelű. (2 pont)

A lejtő hossza mindkét oldalon $s = \sqrt{(L/2)^2 + h^2}$. (1 pont)

Az első lejtőt t_1 idő alatt teszi meg, melyre a kezdősebesség nélkül megtett út formulája szerint $s = \frac{1}{2}at_1^2$. Ebből egyszerűen adódik $t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a}}$. (2 pont)

A test sebessége a lejtő alján $v_1 = at_1 = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2sa}$.

A második lejtőn megtett út többféleképpen számolható, egy lehetséges megoldás:

$s = v_1 t_2 - \frac{1}{2}at_2^2 = \sqrt{2sa}\cdot t_2 - \frac{1}{2}at_2^2$ (2 pont)

Az ebből kapott $-\frac{1}{2}at_2^2 + \sqrt{2sa}\cdot t_2 - s = 0$ másodfokú egyenlet egyetlen gyöke $t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ (4 pont)

A test $t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{2s}{a}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{(L/2)^2+h^2}}{g\sin\alpha}} = 2\sqrt{2\frac{\sqrt{(L/2)^2+h^2}}{g\frac{h}{\sqrt{(L/2)^2+h^2}}}} = \underline{\underline{2\sqrt{2\frac{(L/2)^2+h^2}{gh}}}}$ idő alatt ér át a túlpartra. (1 pont)

b) Vízszintes hajítás esetén legyen v_2 a kezdősebesség. Ahhoz hogy a híd közepén landoljon, vízszintesen $L/2$ utat kell megtennie, így a vízszintes hajítás időtartama $t_3 = \frac{L}{2v_2}$ ideig kell, hogy tartson. A függőlegesen megtett út ekkor h-nak kell, hogy megfeleljen. (2 pont)

$h = \frac{1}{2}gt_3^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{L}{2v_2}\right)^2$, amiből $\underline{\underline{v_2 = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}}}$ adódik a szükséges kezdősebességre. (2 pont)

c) Ha rugalmatlan ütközéssel érkezik, akkor v_2 sebességgel folytatja útját a második lejtőn. A feladat első részében kiszámolt $v_1 = \sqrt{2sa}$ megfelel annak a minimális sebességnek, amivel a lejtő aljáról még éppen feljut a tetejére. Ezért a $v_2 \geq v_1$ esetet kell megvizsgálnunk. (2 pont)

Ekkor $\frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}} \geq \sqrt{2\sqrt{(L/2)^2+h^2}\cdot g\frac{h}{\sqrt{(L/2)^2+h^2}}}$, azaz

$\frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}} \geq \sqrt{2gh}$, amiből $\frac{L}{2} \geq \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2h$. Ebből átrendezéssel $\underline{\underline{\frac{h}{L} \leq \frac{1}{4}}}$ adódik. (2 pont)

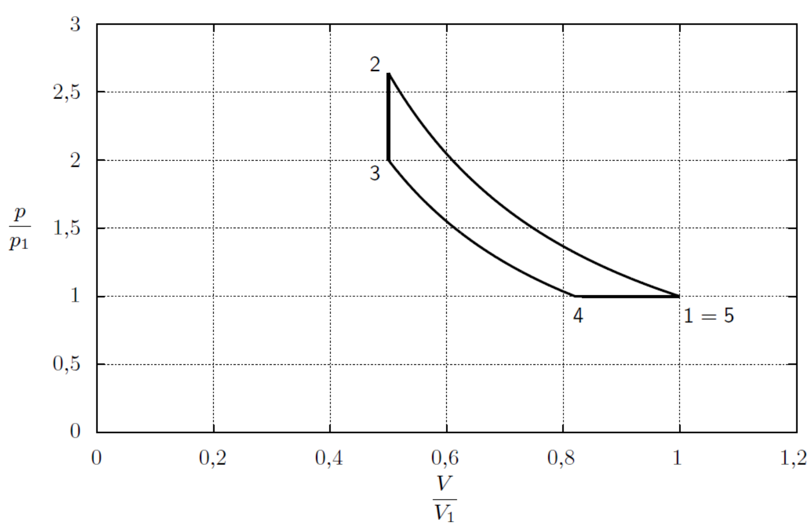
$\frac{h}{L} = \frac{1}{4}$ eredményre, vagy más hibás relációjel használata esetén 1 pont levonás javasolt.

10. évf. 2. feladat.

a) Az első folyamat során a nitrogén gázt hirtelen összenyomjuk fele térfogatára. Mivel gyorsan végbemenő folyamatról van szó, így az adiabatikusnak tekinthető. (1 pont)
$V_2 = 0.5V_1$. (1 pont)
A második szakaszban megvárjuk, míg a hőmérséklet felveszi a környezet hőmérsékletét, ami megegyezik a gáz összenyomás előtti, kiindulási hőmérsékletével. Emiatt a második folyamat izochor, mivel a térfogat állandó. (1 pont)
A második szakasz végén a hőmérséklet tehát megegyezik a kiindulási hőmérséklettel, azaz $T_3 = T_1$, így felírhatjuk, hogy $p_3V_3 = p_1V_1$. (2 pont)

A térfogat továbbra is fele az eredetinek így a nyomás az eredeti kétszerese: $p_3 = p_1\frac{V_1}{V_3} = 2p_1$.
(1 pont)
A dugattyú két oldalán a nyomás különböző, így annak elengedésekor hirtelen kitágul, ami szintén adiabatikus folyamat. $p_4V_4^\kappa = p_3V_3^\kappa = 2p_1\cdot(0.5V_1)^\kappa$. (3 pont)
Az adiabatikus folyamat során a dugattyú addig emelkedik, amíg két oldalán azonos nem lesz a nyomás, azaz a belső nyomás fel nem veszi a külső atmoszférikus nyomást, azaz $p_4 = p_1$.
(1 pont)

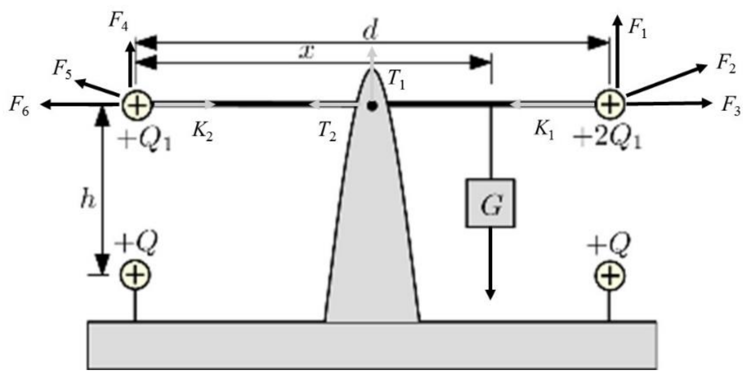
Ez alapján $V_4^\kappa = 2\cdot(0.5V_1)^\kappa$, vagyis $V_4 = 2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\cdot V_1$. (3 pont)
Nitrogén esetén $\kappa = 1{,}4$, így $V_4 \approx 0{,}82\cdot V_1$, vagyis az <u>eredeti magasság 82%-áig emelkedik</u> rögtön az elengedés után. (1 pont)
b) A belső és külső hőmérséklet kiegyenlítődését követően a rendszer visszaáll a kezdeti állapotába: mivel a kezdeti és végső nyomás, illetve a kezdeti és végső hőmérséklet azonosak, így az ideális gáztörvény értelmében a kezdeti és végső térfogat megegyezik, tehát végeredményben a <u>dugattyú magassága is a kiindulási értékre áll be</u>. (3 pont)
c)



(3 pont)

10. évf. 3. feladat.

Rajzoljuk fel a feladat megoldása szempontjából releváns erőket: (3 pont)



a) A rúd jobb végén lévő $2Q_1$ nagyságú töltésre ható Coulomb-erők:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2Q_1Q}{h^2}, \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2Q_1Q}{h^2 + d^2}, \quad F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2Q_1^2}{d^2}. \qquad \text{(1+1+1 pont)}$$

A rúd bal végén lévő Q_1 nagyságú töltésre ható Coulomb-erők:

$$F_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1Q}{h^2}, \quad F_5 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1Q}{h^2 + d^2}, \quad F_6 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2Q_1^2}{d^2}. \qquad \text{(1+1+1 pont)}$$

A rúdra a tengelyen T tartóerő hat, melynek függőleges komponensét jelölje T_1, vízszintes komponensét T_2.

A rúd K_1 erővel tartja a jobb oldali $2Q_1$ töltést, K_2 erővel tartja a bal oldali Q_1 töltést.

A súlyra ható nehézségi erő nagysága G.

Legyen α az F_2 és F_3 által bezárt szög. $\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}$.

Egyensúly esetén a forgatónyomatékok összege nulla:

$$G \cdot \left(x - \frac{d}{2} \right) + \left(F_4 + F_5 \sin\alpha \right) \cdot \frac{d}{2} - \left(F_1 + F_2 \sin\alpha \right) \cdot \frac{d}{2} = 0. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből kifejezhető a keresett x értéke:

$$x=\left(G+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q_1Q}{h^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q_1Q}{h^2+d^2}\sin\alpha-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q}{h^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q}{h^2+d^2}\sin\alpha\right)\cdot\frac{d}{2G}=$$

(2 pont)

$$=\underline{\underline{\frac{d}{2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot Q_1Q\frac{d}{2G}\cdot\left(\frac{1}{h^2}+\frac{h}{\left(h^2+d^2\right)^{3/2}}\right)}}.$$

b) A K_1 erő egyensúlyt tart a F_1, F_2 és F_3 erők vízszintes komponenseinek összegével, hasonlóan a K_2 erő a F_4, F_5 és F_6 erőkkel.

$$K_1=F_2\cos\alpha+F_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q_1Qd}{\left(h^2+d^2\right)^{3/2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q_1^2}{d^2}.$$ (1 pont)

$$K_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Qd}{\left(h^2+d^2\right)^{3/2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q_1^2}{d^2}.$$ (1 pont)

Látható, $Q_1Q>0$ esetén a $K_1>K_2$, így rúdra a tengely $T_2=K_1-K_2$ nagyságú tartóerővel hat, amely horizontális és a bal oldal irányába mutat. (1 pont)

Emiatt vegyük észre, hogy a rúd két oldalán különböző nagyságú erő ébred a rúdban. A jobb oldali vége és a tengely közötti szakaszon K_1-gyel megegyező nagyságú, míg a bal oldali vége és a tengely közötti szakaszon K_2-vel megegyező nagyságú a rúdban ébredő hosszanti irányú erő.

(1 pont)

Egyensúly esetén a rúdra ható függőleges irányú erők összege is nulla:

$$F_1+F_2\sin\alpha+F_4+F_5\sin\alpha+T_1-G=0.$$ (1 pont)

c) Az utolsó kérdésben arra az esetre keressük a választ, amikor a forgástengely rúdra kifejtett T_1 nagyságú függőleges irányú ereje nullával egyenlő.

Ekkor:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q_1Q}{h^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q_1Q}{h^2+d^2}\sin\alpha+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q}{h^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q}{h^2+d^2}\sin\alpha-G=0,$$

amiből a Q_1 értékére következik, hogy $\underline{\underline{Q_1=\dfrac{G}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}3Q\cdot\left(\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{h}{\left(h^2+d^2\right)^{3/2}}\right)}}}.$ (2 pont)

10. évf. 4. feladat.

a). A grafikonról leolvasható, hogy 10 mp az első kis beosztás (1 pont). Ott a gyorsulás értéke 5 és 6 $\frac{m}{s^2}$ között van félúton; azaz kb 5.5 $\frac{m}{s^2}$, (1 pont) ami átváltva $5{,}5 \cdot 10^6 \frac{\mu m}{s^2}$ (1 pont). A többi érték nagyságrendekkel tér el ettől (1 pont).

A helyes válasz tehát a **C**). (1 pont)

b) A grafikonról leolvasva láthatjuk, hogy a maximális gyorsulás-érték kb. 505 mp-vel indulás után mérhető (1 pont). Ekkor kb. 33 $\frac{m}{s^2}$ a mérhető gyorsulás értéke (1 pont). De mennyi ez a megadott, $\frac{km}{h^2}$-ben?

$$1\frac{m}{s^2} = 1\frac{\frac{1}{1000}km}{\left(\frac{1}{3600}h\right)^2} = 12960\frac{km}{h^2}$$ (2 pont)

Vegyük észre, hogy ez nem a megszokott 3,6-os szorzóérték. Ez ugyanakkor nem probléma, hiszen az csak a sebességek átváltására használható; ez pedig gyorsulásokéra.

A keresett gyorsulás 33 $\frac{m}{s^2}$ tehát átváltva 427000 $\frac{km}{h^2}$; azaz a helyes válasz az **A**). (1 pont)

c) A Kármán-vonal a feladat szövege alapján 100 km. Ez az a határ, ahol a repüléshez szükséges sebesség nagyobb, mint a körpályán maradáshoz szükséges. Ezt a rakéta kb. 205 mp-vel indulás után érte el (1 pont). Ekkor a rakéta gyorsulása, a grafikonról leolvasva kb. 8,9 $\frac{m}{s^2}$ (1 pont). Ez a felszínen mérhető nehézségi gyorsulás kb. 90,7%-a (2 pont). A helyes válasz tehát a **B**). (1 pont)

d) A feladat szövege alapján a Tesla pályájának nagytengelye 1 + 1,664 CsE; a félnagytengely pedig 1,332 CsE (1 pont). A Föld pályájának félnagytengelye pedig 1 CsE. Használjuk fel Kepler III. törvényét (1 pont) a Tesla keringési idejének megállapításához! Ehhez használjuk fel a Föld pályaadatait.

$$\frac{1\ CsE^3}{1\ év^2} = \frac{1{,}332^3\ CsE^3}{x\ év^2} \rightarrow x = 1{,}332^{\frac{3}{2}}\ év = 1{,}5373\ év = 561\ nap$$ (1 pont)

A Naptól legtávolabbi pontot fele ennyi idő alatt éri el, azaz kb. 281 nap alatt. (1 pont)

Azaz a helyes válasz a **D**). (1 pont)

XXII. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny a református középiskolák számára 2018

11. osztály – MEGOLDÁSOK

1. Feladat – Megoldás:

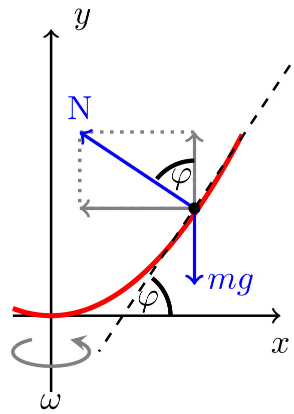
Ad a) Tegyük fel, hogy a kicsiny test egy adott f fordulatszám, azaz $\omega = 2\pi f$ szögsebesség esetén a forgó edényhez képest egy adott pontban nyugalomban van. Ez azt jelenti, hogy együtt forog az edénnyel, azaz ω szögsebességű egyenletes körmozgást végez.
A testre ható erők: az edénytől származó nyomóerő (N) és a nehézségi erő ($m \cdot g$).
Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele:

- a ható erők eredője a forgástengelyre merőlegesen befelé mutat
- az eredő erő nagysága $m \cdot \omega^2 x$, ahol x a forgástengelytől vett távolság.

Vezessük be az érintő hajlásszögére a φ jelölést.
Ezt fölhasználva a körmozgás dinamikai feltétele $x - y$ irányú komponensekben

$$N \sin\varphi = m \cdot \omega^2 x, \qquad N \cos\varphi = mg. \qquad \textbf{(4 p)}$$

Az első egyenletet a másodikkal elosztva: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\omega^2 x}{g}$. **(3 p)**



Tehát kaptunk egy feltételt a parabola érintőjének meredekségére. De a parabola tulajdonságai alapján tudjuk, hogy ez a meredekség $2\,a\,x$, azaz $\mathrm{tg}\varphi = 2\,a\,x$. **(2 p)**

$$\Rightarrow \quad 2\,a\,x = \frac{\omega^2 x}{g} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 2\,a\,g \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\,a\,g}.}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

Tehát a keresett szögsebesség, azaz a fordulatszám csak a parabolát jellemző a paramétertől és a nehézségi gyorsulástól függ, és független a parabolán kiválasztott pont helyétől. **(2 p)**

(Összesen: 15 p)

Ad b) Az 1, 2, 3 parabolák esetén $a_1 < a_2 < a_3$ a parabolát jellemző a paraméter értéke. Ennek megfelelően az $\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\,a\,g}$ formula alapján a fordulatszámokra $f_1 < f_2 < f_3$.
Tehát a 3. esetben kell a legnagyobb és az 1. esetben kell a legkisebb fordulatszám. **(5 p)**

2. Feladat – Megoldás:

Jelölések & adatok: $f = 5$, $\Delta V = 0{,}01\, V_0$, $\Delta p = 0{,}005\, p_0$, $n = 1\,\text{mol}$, $R = 8{,}31\,\text{J}\,(\text{mol K})^{-1}$.

A nitrogén állapotegyenlete a térfogatváltozás előtt és után:

$$p_0 V_0 = nRT_0, \qquad (p_0 - \Delta p)(V_0 + \Delta V) = nR(T_0 + \Delta T). \qquad \textbf{(2 p)}$$

A második egyenletet kibontva és az elsőt fölhasználva kapjuk: $nR\Delta T = p_0\Delta V - \Delta p V_0 - \Delta p\,\Delta V$.

Az utolsó tag elhanyagolhatóan kicsiny az előtte levőkhöz képest, így kapjuk:

$$nR\Delta T \approx p_0\Delta V - \Delta p V_0 = p_0 V_0 \left(\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{\Delta p}{p_0}\right). \qquad \textbf{(3 p)} \qquad (1)$$

A folyamathoz tartozó hőkapacitás definíció szerint: $C = \dfrac{Q}{\Delta T}$. **(1 p)**

A gáz által felvett hő a második fő tétel alapján: $Q = \Delta E + W_g$, ahol W_g a gáz által végzett munka.

Így a hőkapacitás két tag összegeként adódik: $\boxed{C = \dfrac{\Delta E}{\Delta T} + \dfrac{W_g}{\Delta T}}$. **(2 p)**

1. tag: a gáz belső energiájának növekedése: $\Delta E = \dfrac{5}{2} nR\Delta T \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta E}{\Delta T} = \dfrac{5}{2} nR$. **(2 p)**

2. tag: Egy kis szakaszon a gáz munkája: $W_g = \dfrac{p_0 + p}{2}\Delta V = p_0\Delta V - \dfrac{\Delta p \cdot \Delta V}{2} \approx p_0\Delta V$. **(2 p)**

Fölhasználva a (1)-et: $\dfrac{W_g}{\Delta T} \approx \dfrac{p_0\Delta V}{\Delta T} \approx \dfrac{nR\, p_0\Delta V}{p_0 V_0 \left(\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{\Delta p}{p_0}\right)} = nR\dfrac{\frac{\Delta V}{V_0}}{\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{\Delta p}{p_0}} = nR\dfrac{0{,}01}{0{,}01 - 0{,}005} = 2nR$.

(6 p)

Így a folyamathoz tartozó hőkapacitás jó közelítéssel:

$$C = \frac{\Delta E}{\Delta T} + \frac{W_g}{\Delta T} \approx \frac{5}{2}nR + 2nR = \underline{\underline{\frac{9}{2}nR}} \quad \Rightarrow \quad C \approx \frac{9}{2} \cdot 1 \cdot 8{,}31 = \underline{\underline{37{,}4\,\frac{\text{J}}{\text{K}}}}. \qquad \textbf{(2 p)}$$

Tehát a nitrogén gáz hőkapacitása közelítőleg $\underline{\underline{\frac{9}{2}nR}}$, mely az 1 mól gázra $\underline{\underline{37{,}4\ \text{J/K}}}$-nek adódik

Megjegyzés: Elhanyagolás nélkül is végigszámolható.

Ekkor: $nR\Delta T = p_0\Delta V - \Delta p V_0 - \Delta V\Delta p = p_0 V_0\left(\dfrac{\Delta V}{V_0} - \dfrac{\Delta p}{p_0} - \dfrac{\Delta V}{V_0}\dfrac{\Delta p}{p_0}\right)$.

A gáz munkáját is pontosan figyelembe véve:

$$\frac{W_g}{\Delta T} = \frac{p_0\Delta V - \Delta p\Delta V/2}{\Delta T} = nR\frac{\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V_0}\frac{\Delta p}{p_0}}{\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{\Delta V}{V_0}\frac{\Delta p}{p_0}} = nR\frac{0{,}01 - 0{,}01 \cdot 0{,}005/2}{0{,}01 - 0{,}005 - 0{,}01 \cdot 0{,}005} = 2{,}015\,nR.$$

$$C = \frac{5}{2}nR + 2{,}015\,nR = 4{,}515\,nR \quad \Rightarrow \quad C = 4{,}515 \cdot 1 \cdot 8{,}31 = \underline{\underline{37{,}52\,\frac{\text{J}}{\text{K}}}}.$$

3. Feladat – Megoldás:

Jelölések & adatok:

$r_k = 6{,}3\ \Omega/\mathrm{m}$, $\alpha_k = -3{,}0 \cdot 10^{-5}\,1/°\mathrm{C}$, $r_m = 5{,}3\ \Omega/\mathrm{m}$, $\alpha_m = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\,1/°\mathrm{C}$, $R_E = 5{,}0\,\Omega$.

Az ellenállás hőmérséklet függéséről tudjuk, hogy az ellenállás értékének megváltozása széles tartományban arányos a hőmérséklet változással és az eredeti ellenállással: $R - R_0 = R_0 \cdot \alpha \cdot (T - T_0)$.

$0\,°\mathrm{C}$-ra vonatkoztatva tehát a T hőmérsékleten mért ellenállás: $R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T)$.

R_0-at a hosszúságegységre eső ellenállással (r) kifejezve:

$$R(T) = r \cdot L \cdot (1 + \alpha \cdot T). \qquad \textbf{(4 p)}$$

A két ötvözet L_k és L_m hosszú vezetékdarabjának hőmérséklet-függő ellenállása:

$R_k(T) = r_k \cdot L_k \cdot (1 + \alpha_k \cdot T)$, $R_m(T) = r_m \cdot L_m \cdot (1 + \alpha_m \cdot T)$.

Ezeket sorosan kapcsoljuk, így az eredő ellenállás:

$$R_E = (r_k \cdot L_k + r_m \cdot L_m) + (\alpha_k \cdot r_k \cdot L_k + \alpha_m \cdot r_m \cdot L_m) \cdot T.$$

R_E akkor lesz hőmérséklet független, ha T együtthatója eltűnik, azaz: $\alpha_k \cdot r_k \cdot L_k + \alpha_m \cdot r_m \cdot L_m = 0$.

Ekkor az állandó ellenállás $R_E = r_k \cdot L_k + r_m \cdot L_m$. **(Egyenletrendszer fölírása: 6 p)**

Az első egyenletbe az értékeket behelyettesítve és 10^{-5}-nel egyszerűsítve:

$$0 = -3{,}0 \cdot 6{,}3 \cdot L_k + 1{,}4 \cdot 5{,}3 \cdot L_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_m = \frac{3{,}0 \cdot 6{,}3}{1{,}4 \cdot 5{,}3}\, L_k = 2{,}547\, L_k}.$$

A második egyenletbe az értékeket behelyettesítve, és kihasználva az L_k és L_m közötti kapcsolatot:

$$5{,}0 = 6{,}3 \cdot L_k + 5{,}3 \cdot 2{,}547 \cdot L_k \quad \Rightarrow \quad L_k = \frac{5{,}0}{6{,}3 + 5{,}3 \cdot 2{,}547} = \underline{\underline{0{,}25\,\mathrm{m}}} \quad \Rightarrow \quad L_m = 2{,}547 \cdot 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}64\,\mathrm{m}}}$$

Tehát egy $\underline{\underline{0{,}25\,\mathrm{m}}}$-es konstantán vezetéket kell összekapcsolni egy $\underline{\underline{0{,}64\,\mathrm{m}}}$-es manganin vezetékkel.

(Egyenletrendszer megoldása: 10 p)

4. Feladat – Megoldás: **(Mind 5 p. Indoklás nélkül fele pont.)**

1. Körülbelül mekkora egy tipikus neutroncsillag sűrűsége?

   $\boxed{\text{A.}\quad 2\cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}}$

   Az R sugarú gömb térfogata $V=\frac{4}{3}R^3\pi$. A szöveg alapján $R=14\,\mathrm{km}=1{,}4\cdot 10^4\,\mathrm{m}$, így a sűrűség:

   $$\varrho=\frac{m}{V}=\frac{3m}{4R^3\pi}=\frac{3\cdot 2{,}0\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{4\cdot(1{,}4\cdot 10^4)^3\pi\,\mathrm{m^3}}=1{,}74003\cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}\quad\sim\frac{10^{30}}{(10^4)^3}=10^{30-12}=10^{18}$$

   A nagyságrend a konkrét számolás elvégzése nélkül is látszik.

2. Hogyan aránylik a neutroncsillag felszínén a gravitációs gyorsulás a Nap felszínén föllépő gravitációs gyorsuláshoz képest?

   $\boxed{\text{C.}\quad (50\,000)^2\text{-szer erősebb.}}$

   $$mg=G\frac{mM}{R^2}\quad\Rightarrow\quad g=G\frac{M}{R^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{g_{\mathrm{Cs}}}{g_{\mathrm{Nap}}}=\frac{R^2_{\mathrm{Nap}}}{R^2_{\mathrm{Cs}}}=\left(\frac{R_{\mathrm{Nap}}}{R_{\mathrm{Cs}}}\right)^2=(50\,000)^2.$$

3. A Föld $1{,}5\cdot 10^{11}$ méter távolságra helyezkedik el a Naptól. Tegyük fel, hogy van egy ugyanilyen tömegű bolygó, ugyanúgy $1{,}5\cdot 10^{11}$ méternyire a neutroncsillagtól is. Hogyan aránylana a föltételezett bolygóra ható gravitációs vonzóerő a Nap által a Földre kifejtett vonzóerőhöz képest?

   $\boxed{\text{A.}\quad \text{Ugyanakkora lenne.}}$

   $F_{\mathrm{grav}}=G\frac{mM}{R^2}$, ahol a távolság és a tömegek megegyeznek, így ugyanakkora lenne.

4. Szabadesés során a neutroncsillag felé eső objektumok megnyúlnának. Az alábbiak közül melyik magyarázat helyes?

B. Az objektum neutroncsillaghoz közelebb eső végére nagyobb vonzóerő hatna, mint a csillagtól távolabb eső végére.

   A nagy gravitációs erő önmagában nem magyarázza a jelenséget így C. és D. nem lehet jó. A sűrűség sem magyarázza így az A. sem helyes.

XXII. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny
a református középiskolák számára
2018

12. osztály – MEGOLDÁSOK

1. Feladat – Megoldás:

Jelölések & adatok: $M = 320\,\text{kg}$, $p = 1{,}01 \cdot 10^5\,\text{Pa}$, $V = 650\,\text{m}^3$, $\varrho_L = 1{,}29\,\text{kg/m}^3$, $M_L = 29\,\text{g/mol} = 29 \cdot 10^{-3}\,\text{kg/mol}$, $R = 8{,}31\,\text{J}\,(\text{mol K})^{-1}$.

A fölemelkedéshez a ballonra ható felhajtóerőnek meg kell egyeznie a ballon és a bezárt levegő összsúlyával: $(M + m)\,g = V \cdot \varrho_L \cdot g$.

Ahonnan a ballonban lévő levegő tömege (forró állapotban):

$m = \varrho_L\, V - M = 1{,}29 \cdot 650 - 320 = 518{,}5\,\text{kg}$. **(10 p)**

A forró levegő állapotegyenlete: $p\,V = \dfrac{m}{M_L}\,R\,T$, ahonnan a hőmérséklet kifejezhető:

$$T = \frac{p\,V\,M_L}{m\,R} = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 650 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{518{,}5 \cdot 8{,}31} = \underline{\underline{441{,}86\,\text{K} = 168{,}86\,°\text{C}}}. \qquad \textbf{(10 p)}$$

Tehát a levegőt $\underline{\underline{441{,}86\,\text{K}}}$-re azaz $\underline{\underline{168{,}86\,°\text{C}}}$-ra kell fölmelegíteni ahhoz, hogy a ballon elkezdjen emelkedni.

2. Feladat – Megoldás:

Jelölések & adatok:

$r_k = 6{,}3\ \Omega/\text{m}$, $\alpha_k = -3{,}0 \cdot 10^{-5}\,1/°\text{C}$, $r_m = 5{,}3\ \Omega/\text{m}$, $\alpha_m = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\,1/°\text{C}$, $R_E = 5{,}0\,\Omega$.

Az ellenállás hőmérséklet függéséről tudjuk, hogy az ellenállás értékének megváltozása széles tartományban arányos a hőmérséklet változással és az eredeti ellenállással: $R - R_0 = R_0 \cdot \alpha \cdot (T - T_0)$.

0 °C-ra vonatkoztatva tehát a T hőmérsékleten mért ellenállás: $R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T)$.

R_0-at a hosszúságegységre eső ellenállással (r) kifejezve:

$$R(T) = r \cdot L \cdot (1 + \alpha \cdot T). \qquad \textbf{(4 p)}$$

A két ötvözet L_k és L_m hosszú vezetékdarabjának hőmérséklet-függő ellenállása:

$R_k(T) = r_k \cdot L_k \cdot (1 + \alpha_k \cdot T)$, $\quad R_m(T) = r_m \cdot L_m \cdot (1 + \alpha_m \cdot T)$.

Ezeket sorosan kapcsoljuk, így az eredő ellenállás:

$$R_E = (r_k \cdot L_k + r_m \cdot L_m) + (\alpha_k \cdot r_k \cdot L_k + \alpha_m \cdot r_m \cdot L_m) \cdot T.$$

R_E akkor lesz hőmérséklet független, ha T együtthatója eltűnik, azaz: $\alpha_k \cdot r_k \cdot L_k + \alpha_m \cdot r_m \cdot L_m = 0$.

Ekkor az állandó ellenállás $R_E = r_k \cdot L_k + r_m \cdot L_m$. **(Egyenletrendszer fölírása: 6 p)**

Az első egyenletbe az értékeket behelyettesítve és 10^{-5}-nel egyszerűsítve:

$$0 = -3{,}0 \cdot 6{,}3 \cdot L_k + 1{,}4 \cdot 5{,}3 \cdot L_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_m = \frac{3{,}0 \cdot 6{,}3}{1{,}4 \cdot 5{,}3}\, L_k = 2{,}547\, L_k}.$$

A második egyenletbe az értékeket behelyettesítve, és kihasználva az L_k és L_m közötti kapcsolatot:

$$5{,}0 = 6{,}3 \cdot L_k + 5{,}3 \cdot 2{,}547 \cdot L_k \quad \Rightarrow \quad L_k = \frac{5{,}0}{6{,}3 + 5{,}3 \cdot 2{,}547} = \underline{\underline{0{,}25\,\text{m}}} \quad \Rightarrow \quad L_m = 2{,}547 \cdot 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}64\,\text{m}}}$$

Tehát egy $\underline{\underline{0{,}25\,\text{m}}}$-es konstantán vezetéket kell összekapcsolni egy $\underline{\underline{0{,}64\,\text{m}}}$-es manganin vezetékkel.

(Egyenletrendszer megoldása: 10 p)

3. Feladat – Megoldás:

Jelölések & adatok: $m = 1\,\text{g}$, $A = 0{,}011\,\text{Bq}$, $T_{1/2} = 5730$ év, $N_A = 6 \cdot 10^{23}\,1/\text{mol}$, $M = 12\,\text{g/mol}$

Először meghatározzuk egy jelenlegi szerves minta aktivitását.

1 g szénben $\frac{m}{M} \cdot N_A = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 5 \cdot 10^{22}$ darab szénatom van. **(2 p)**

Ennek $8,3 \cdot 10^{11}$-ed része a ^{14}C száma: $N = \frac{5 \cdot 10^{22}}{8{,}3 \cdot 10^{11}} = 6{,}02 \cdot 10^{10}$ db. **(2 p)**

A ^{14}C felezési ideje 5730év $= 1{,}81 \cdot 10^{11}$ s, így a bomlási állandója:

$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{5730 \text{ év}} = 1{,}21 \cdot 10^{-4}\text{év}^{-1} = 3{,}84 \cdot 10^{-12}\,\text{s}^{-1}$. **(2 p)**

Az aktivitás definíciója adott anyagmennyiségre $A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$, viszont a radioaktív bomlási törvény alapján $\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$, így $A = \lambda \cdot N = 3{,}84 \cdot 10^{-12}\,\text{s}^{-1} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{10} = 0{,}23\,\text{Bq}$ a ^{14}C aktivitása 1 g szénre vonatkoztatva jelenkori szerves mintákban, illetve élő szervezetek esetén. **(4 p)**

Ad a) Ha a minta nem szennyezett, akkor 1 g szénre vonatkozóan $A = 0,011$ Bq, és aktivitása $A_0 = 023$ Bq volt élő korában. Mivel a bomlási törvény az aktivitásra is igaz:

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{1}{1,21 \cdot 10^{-4}} \ln\left(\frac{0{,}011}{0{,}23}\right) = \underline{\underline{25125 \text{ év}}}.$$

Tehát a szennyezetlen minta valódi életkora 25125 év. **(4 p)**

Ad b) Amikor a szennyezett minta aktivitását mérik, és nem tudnak a szennyezésről, akkor 1 g szén aktivitásában egyszerre lesz jelen a régi szén és a jelenkori szén aktivitása.

- 1 g *régi* szén aktivitása 0,011 Bq, így figyelembevéve, hogy 0,98 g van jelen, az 1 g-ra visszaszámolt aktivitás $0{,}98 \cdot 0{,}011 = 0{,}01078\,\text{Bq}$.
- 1 g *jelenlegi* szén aktivitása 0,23 Bq, így figyelembevéve, hogy 0,02 g van jelen, az 1 g-ra visszaszámolt aktivitás $0{,}02 \cdot 0{,}23 = 0{,}0046\,\text{Bq}$.

Ezek alapján a minta aktivitását $A^* = 0{,}01078 + 0{,}0046 = 0{,}01538\,\text{Bq}$-nek mérik. **(4 p)**

Az előzőhöz hasonlóan a minta (hamis) életkora:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A^*}{A_0}\right) = -\frac{1}{1{,}21 \cdot 10^{-4}} \ln\left(\frac{0{,}01538}{0{,}23}\right) = \underline{\underline{22355 \text{ év}}} \qquad \textbf{(2 p)}$$

Tehát a szennyeződés okozta magasabb aktivitás miatt a minta életkora csak 22355 év-nek adódik.

4. Feladat – Megoldás: **(Mind 4 p. Indoklás nélkül fele pont.)**

1. Tegyük fel, hogy egy alfa-részecskét lövünk be a kondenzátor lemezek közé az első kísérleti elrendezésben. Mekkora az alfa-részecskére ható elektromos kölcsönhatásból származó erő az egyetlen protonra ható erőhöz képest?

   C. Az alfa-részecskére kétszer akkor erő hatna mint a protonra.

   A lemezek közötti elektromos térerősség E_1, így a térbe helyezett töltött részecskékre $F = Q \cdot E_1$ nagyságú erő hat. Az alfa-részecske kétszeresen pozitív töltésű, azaz kétszer akkora töltése van mint a protonnak, így kétszer akkora erő hatna rá.

2. Mekkora a második kísérletben a pozitív töltésű kondenzátorlap töltése?

   A. $Q_1/3$.

   A síkkondenzátor kapacitása a méretét jellemző adatokból az alábbi formula alapján számolható: $C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$. Így a második kísérletben a távolság növelésével a kapacitás csökken, mégpedig éppen harmadára.
   A kondenzátor kapacitása a rajta lévő töltés és a lapok közti feszültség hányadosaként adódik: $C = \dfrac{Q}{U}$. Mivel ugyanazt a telepet használtuk a feszültség változatlanul U_0, így a lapokon lévő töltés csökkent harmadára: $Q_1/3$-ra.

3. Mekkora a második kísérletben a fémlapok közötti térerősség?

   A. $E_1/3$.

   Az elektromos térerősség és a lapok közötti feszültség között fönnáll az $U = E \cdot d$ összefüggés. Mivel ugyanazt a telepet használtuk a feszültség változatlanul U_0, így a távolság háromszorosára növelésével a térerősség arányosan a harmadára csökken: $E_1/3$.

4. Mekkora lesz a harmadik kísérlet végén a pozitív töltésű kondenzátorlap töltése?

   B. Q_1.

   A harmadik kísérlet végén lecsatlakoztatjuk a vezetékeket a kondenzátor lemezekről. Így a lemezeken lévő töltés mennyisége nem változik meg, jóllehet változtatjuk a lemezek távolságát. (A teleppel való kapcsolat megszűnése után nem távozhatnak és nem juthatnak további töltések a lemezekre.)

5. Mekkora lesz a kondenzátor lemezek közti potenciálkülönbség a harmadik kísérlet végére?

   C. $2\,U_0$.

   A harmadik kísérlet végén a töltés változatlanul Q_1. A lemezek közti távolság megduplázódott, így a kapacitás a felére csökkent (lásd 2. kérdés). Ez a kapacitás $C = \dfrac{Q}{U}$-ként adódik, így a lemezek közti feszültségnek, azaz a potenciálkülönbségnek duplájára kellett nőnie.