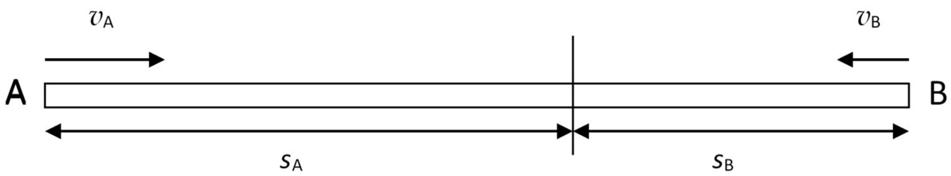
9./1. feladat.

Adatok: d_{AB}= 90 km, t_A= 2 h, t_B= 4,5 h

Jelölések: s_A, ill. s_B jelölje a találkozási pont A-tól, ill. B-től mért távolságát

v_A, ill. v_B jelölje az A-ból, ill. a B-ből induló kerékpáros sebességét



A találkozásig megtett utak a sebességgel arányosak:

$$\frac{s_A}{s_B} = \frac{v_A}{v_B}.$$ 2 pont

A találkozás után megtett utak: $s_A = v_B \cdot t_B \quad és \quad s_B = v_A \cdot t_A$.

Ezt az első egyenletben használjuk fel: $\frac{v_B \cdot t_B}{v_A \cdot t_A} = \frac{v_A}{v_B}.$ 4 pont

Ebből $\frac{t_B}{t_A} = \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{4,5\ h}{2\ h} = 2,25.$ 4 pont

A sebességek aránya:

$$\underline{\frac{v_A}{v_B} = 1,5}$$ 2 pont

A teljes távolságra:

$$d_{AB} = s_A + s_B = v_B \cdot t_B + v_A \cdot t_A$$
$$d_{AB} = v_B \cdot t_B + 1,5 \cdot v_B \cdot t_A = v_B\left(t_B + 1,5 \cdot t_A\right)$$ 3 pont

$$v_B = \frac{d_{AB}}{t_B + 1,5 \cdot t_A} = \frac{90\ km}{7,5\ h}$$ 2 pont

A két kerékpáros sebessége:

$$\underline{\underline{v_B = 12\frac{km}{h}}}, \quad \underline{\underline{v_A = 18\frac{km}{h}}}.$$ 3 pont

9./2. feladat.

Adatok: m = 2 kg, h = 10 m, v_1= 13 m/s, g=9,81 m/s

Keresett : v_2= ? W= ?

Ha nem hat a testre közegellenállási erő, akkor érvényes a mechanikai energia megmaradásának törvénye. Jelöljük a végsebességet ebben az esetben v_2-vel:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_2^2, \qquad \text{4 pont}$$

$$\underline{\underline{v_2}} = \sqrt{2gh} = \underline{\underline{14,0\,\frac{m}{s}}}. \qquad \text{4 pont}$$

Használjuk a munkatételt:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_{kezdő}^2 = W_{nehézségierő} + W_{ellenállási}$$
$$\frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = mgh + W_{ellenállási}$$
5 pont

$$W_{ellenállási} = \frac{1}{2} m v_1^2 - mgh = 169\,J - 196,2\,J = -27,2J. \qquad \text{5 pont}$$

A test a közegellenállás legyőzésére 27,2 J pozitív munkát végzett. 2 pont

9./3. feladat.

A súrlódással rendelkező lejtőn felfelé mozgás esetén a lassulások az egyes szakaszokon a jól ismert módon, az erők összegzésével számolhatók ki:

$$a_{1,fel} = g \cdot \sin(\alpha) + \mu_1 \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$
$$a_{2,fel} = g \cdot \sin(\alpha) + \mu_2 \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$
4 pont

A feladat a munkatétel alkalmazásával oldható meg. A lejtő alján a test bizonyos mozgási energiával rendelkezik, ami a mozgás végére nullára csökken. Ez a különbség megegyezik az eredő erők által végzett munkával. Mivel a mozgás iránya és a eredő erők iránya ellentétes, ezért a közöttük bezárt szög 180°.

$$0 - \frac{1}{2} m v^2 = \sum F \cdot s \cdot \cos(180^\circ) = -\sum F \cdot s \qquad \text{3 pont}$$

Ha a test tömegével egyszerűsítünk, akkor az egyes szakaszok gyorsulásaival számolhatunk. A negatív előjelet minkét oldalról elhagyjuk.

$$\frac{1}{2} v_1^2 = a_{1,fel} \cdot L + a_{2,fel} \cdot L$$
$$\frac{1}{2} v_2^2 = a_{1,fel} \cdot L + a_{2,fel} \cdot L + a_{1,fel} \cdot L$$
4 pont

A két egyenletet egymásból kivonva: $a_{1,fel} \cdot L = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2$ 1 pont

Ebből az első szakaszon tapasztalható lassulás:

$$a_{1,fel} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2L} = \frac{\left(3.5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(2.9\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.2\ \text{m}} = 9.6\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$ 2 pont

A második szakasz is felírható hasonlóan:

$$a_{2,fel} = \frac{2v_1^2 - v_2^2}{2L} = \frac{2\left(2.9\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(3.5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0.2\ \text{m}} = 11.425\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$ 2 pont

A korábban felírt összefüggésből az első szakasz csúszási súrlódási együtthatója:

$$\mu_1 = \frac{a_{1,fel} - g \cdot \sin(\alpha)}{g \cdot \cos(\alpha)} = \frac{9.6\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin(30^\circ)}{9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos(30^\circ)} = 0.553$$ 2 pont

A második szakasz csúszási súrlódási együtthatója:

$$\mu_2 = \frac{a_{2,fel} - g \cdot \sin(\alpha)}{g \cdot \cos(\alpha)} = \frac{11.425\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin(30^\circ)}{9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos(30^\circ)} = 0.767$$ 2 pont

9./4. feladat.

a)

A feladat lényegében a fényévben mért távolság átváltása méterre. Köztudott, hogy a fényév az a távolság, amit a fény egy év alatt tesz meg. 1 pont

A fénysebesség m/s-ban van megadva, ezért az időtartamot vagyis 1,3 milliárd évet másodpercben kell megadnunk:

$$T = 1.3 \cdot 10^9\ \text{év} = 1.3 \cdot 10^9 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60\ \text{s} = 1.3 \cdot 10^9 \times 31557600\ \text{s} \approx 4.1 \cdot 10^{16}\ \text{s}$$ 2 pont

A fénysebességgel megszorozva:

$$L = T \cdot c = 4.1 \cdot 10^{16}\ \text{s} \times 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.23 \cdot 10^{25}\ \text{m}$$ 2 pont

Megjegyzés: A függvénytáblázatból, vagy egyéb írott forrásból kikeresett értékkel számolt távolságra is adható teljes pontszám.

Mivel a fekete lyukak távolságának mérése egyébként is igen pontatlan, így két tizedesjegy feltüntetése sem indokolt. A **d válasz** a helyes, azaz a fekete lyuk távolsága tőlünk kb. $1{,}2 \cdot 10^{25}$ m. 5 pont

b)

A fekete lyukak forgásának frekvenciája: $f = 75\ \mathrm{Hz}$

A centripetális gyorsulás: $a_{cp} = 3.7\cdot 10^{10}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

A centripetális gyorsulás egyenletét felírhatjuk a forgás frekvenciájával:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r = (2\pi \cdot f)^2 \cdot r$$ 3 pont

Ebből adódik a körpálya sugara:

$$r = \frac{a_{cp}}{(2\pi\cdot f)^2} = \frac{3.7\cdot 10^{10}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\left(2\pi\cdot 75\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2} = \frac{3.7\cdot 10^{10}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2.22\cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{s}^2}} = 1.6667\cdot 10^5\ \mathrm{m} = 166.67\ \mathrm{km}$$ 2 pont

A két fekete lyuk közelítőleges távolsága pedig ennek a kétszerese, azaz kb. 333 km. A **c válasz** helyes.

5 pont

9./5. feladat.

Az inga kitérésének szöge adott, és abból kell kiszámolni a lövedék becsapódási sebességét.

Legyen a lövedék becsapódás előtt mérhető sebessége *v*, tömege *m*. A becsapódás során benne marad az ingában, így tökéletesen rugalmatlannak tekinthető az ütközés.Tekintsük az ütközést pillanatszerűnek. 1 pont

Ezek alapján, úgy tekinthetjük, hogy a lövedék *v* sebességgel becsapódik, majd rögtön ezután u sebességgel mozog tovább az ingával, aminek eredeti tömege *M*, a becsapódás után viszont *m*+*M*. Felírható a lendület megmaradásának tétele az ütközésre: 1 pont

$$m\cdot v = (m+M)\cdot u \rightarrow u = \frac{m\cdot v}{m+M}$$

Az inga ezután fellendül, s fokozatosan átalakítja mozgási energiáját magasságivá, míg maximális kitérése mellett a mozgási energiája zérus. Mivel a feladat nem rendelkezett róla, a közegellenállást és más lassító tényezőket elhanyagolhatjuk. Ennek megfelelően felírhatjuk az inga függőleges és maximális kitérésű helyzetére a mechanikai energia megmaradásának tételét! 1 pont

A potenciális energia nullszintje legyen az inga felfüggesztési pontjánál.

$$E_{\text{kin. lent}} + E_{\text{mag. lent}} = E_{\text{kin. fent}} + E_{\text{mag. fent}}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)\cdot u^2 - (m+M)\cdot g\cdot l = 0 - (m+M)\cdot g\cdot l\cdot\cos(\varphi)$$ 1 pont

ahol φ az inga kitérésének maximális szöge, g a gravitációs gyorsulás és l az ingához használt fonál hossza. Behelyettesítve az u-ra kapott összefüggést:

$$\frac{1}{2}(m+M)\cdot\left(\frac{m\cdot v}{(m+M)}\right)^2 - (m+M)\cdot g\cdot l = 0 - (m+M)\cdot g\cdot l\cdot\cos(\varphi)$$

$$\frac{1}{2}\frac{(m\cdot v)^2}{m+M}=(m+M)\cdot g\cdot l\cdot(1-\cos(\varphi))$$

$$v=\frac{m+M}{m}\sqrt{2g\cdot l\cdot(1-\cos(\varphi))}=\frac{3500\text{ g}+11\text{ g}}{11\text{ g}}\cdot\sqrt{9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1\text{ m}\cdot(1-0.5)}=999.7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Azaz rövid számolás után kiderül, ez 3599 km/h, azaz hogy a **b válasz** a helyes. 5 pont

Átszámolva a többit, a kb. 360 m/s-os hangsebesség miatt a c válasz esetén 1080 *m/s*-t kapunk, míg a d válasz esetén ~1160 *m/s*-t kapunk. 1 pont

Amennyiben közvetlenül nem található meg a függvénytáblázatban az 50 °C-os levegőben vett hangsebesség, elegendő az az indoklás, hogy pl. a 20°C-os vagy a 30 °C-os levegőben vett hangsebesség háromszorosa is nagyobb, mint a lövedék sebessége; s a hőmérséklettel a hangsebesség csak nő.

b) A keresett arány egyszerűen kiszámítható, felhasználva azt az összefüggést, hogy az inga magassági energiája teljes mértékben a mozgási energiájából alakult át:

$$x=\frac{E_{\text{pot. ing.}}}{E_{\text{mozg. löv.}}}=\frac{\frac{1}{2}(m+M)\cdot u^2}{\frac{1}{2}m\cdot v^2}$$ 3 pont

Behelyettesítve az *u*-ra kapott összefüggést, kijön, hogy

$$x=\frac{m}{m+M}=\ 0,00313\ \sim\ 3/1000$$

2 pont

Azaz a **d válasz** helyes. 5 pont

10./1. feladat.

a)

A két fekete lyuk tömege kg-ban:

$$M_1 = 36 \cdot M_{Nap} = 7.2 \cdot 10^{31}\ \text{kg}$$
$$M_2 = 29 \cdot M_{Nap} = 5.8 \cdot 10^{31}\ \text{kg}$$
2 pont

A fekete lyukak forgásának frekvenciája: $f = 75\ \text{Hz}$

A fekete lyukak forgásának szögsebessége: $\omega = 471.24 \frac{1}{\text{s}}$ 1 pont

A fekete lyukak ugyanakkora erővel vonzzák egymást, de különböző tömegük miatt különböző sugarú körpályán keringenek.

$$F = M_1 \omega^2 r_1 = M_2 \omega^2 r_2$$
2 pont

Amiből: $r_2 = \dfrac{M_1}{M_2} r_1$ 1 pont

Feltételezhetjük, hogy a vonzóerő csak a két test közötti gravitációs erő:

$$F = G \frac{M_1 M_2}{(r_1 + r_2)^2} = G \frac{M_1 M_2}{\left(r_1 + \frac{M_1}{M_2} r_1 \right)^2}$$
2 pont

Ezt megfeleltetve a centripetális erőnek, ezt az összefüggést kapjuk:

$$M_1 \omega^2 r_1 = G \frac{M_1 M_2}{\left(r_1 + \frac{M_1}{M_2} r_1 \right)^2}$$
3 pont

Ezt r_1-re megoldva:

$$r_1 = \sqrt[3]{G \frac{M_2}{\omega^2 \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^2}} = \sqrt[3]{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \frac{5.8 \cdot 10^{31}\ \text{kg}}{\left(471.24 \frac{1}{\text{s}} \right)^2 \left(1 + \frac{7.2 \cdot 10^{31}\ \text{kg}}{5.8 \cdot 10^{31}\ \text{kg}} \right)^2}} =$$
$$= 1.514 \cdot 10^5\ \text{m} = 151.4\ \text{km}$$
2 pont

A második fekete lyuk körpályájának sugara:

$$r_2 = \frac{M_1}{M_2} r_1 = 151.4\ \text{km} \cdot \frac{7.2 \cdot 10^{31}\ \text{kg}}{5.8 \cdot 10^{31}\ \text{kg}} = 187.9\ \text{km}$$
1 pont

A fekete lyukak tömegközéppontjainak távolsága: $r_1 + r_2 = 151.4\ \text{km} + 187.9\ \text{km} = 339.3\ \text{km}$

1 pont

b)

A Schwarzschild-sugár egyenletébe behelyettesítve:

$$r_{S,1} = \frac{2GM_1}{c^2} = \frac{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\cdot 7.2\cdot 10^{31}\ \mathrm{kg}}{\left(3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 106.7\ \mathrm{km}$$

2+2 pont

$$r_{S,2} = \frac{2GM_2}{c^2} = \frac{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\cdot 5.8\cdot 10^{31}\ \mathrm{kg}}{\left(3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 86.0\ \mathrm{km}$$

$r_{S,1} + r_{S,2} = 106.7\ \mathrm{km} + 86.0\ \mathrm{km} = 192.7\ \mathrm{km}$ 1 pont

A két fekete lyuk sugarainak összege kisebb, mint a tömegközéppontjaik távolsága, így a fekete lyukak felszínei még nem érnek össze.

10./2. feladat.

Adatok: l = 2,4 m, $m_{rúd}$= 1,008 kg, d = 80 cm = 0,8 m

Kezdjük tölteni a bal oldali zacskót. Addig tehetjük ezt, amíg a rúd egyensúlyban marad. Kezdetben, a két kötélben azonos erő ébred ($m_{rúd}g/2$). Majd a jobb oldali kötélben csökken az F_{jobb}, a másikban nő az F_{bal} erő. Szerencsés választás a *P*-n átmenő forgástengely:

Arra a pillanatra írjuk fel az egyensúly feltételét, amikor F_{jobb} 0–ra csökken:

$$m_{bal}\cdot\frac{l}{3}g - m_{rúd}\frac{d}{2}g = 0,$$

8 pont

$$m_{bal} = m_{rúd}\frac{3d}{2l} = \frac{m_{rúd}}{2} = 0{,}504\ kg$$

Most a jobb oldali zacskóba teszünk kekszet addig, amíg a bal oldali kötélerő nem csökken 0-ra. Írjuk fel az egyensúly feltételét a Q –n átmenő tengelyre:

$$m_{bal}g(\frac{l}{3}+d) + m_{rúd}g\frac{d}{2} - m_{jobb}g\frac{l}{3} = 0$$

8 pont

$$m_{jobb} = m_{bal}\frac{3}{l}\frac{2l}{3} + m_{rúd}\frac{3}{l}\frac{d}{2} = 2m_{bal} + \frac{m_{rúd}}{2},$$

$$\underline{m_{jobb}} = 3\frac{m_{rúd}}{2} = \underline{1{,}512\ kg}$$ 2 pont

A két zacskóba összesen $\underline{\underline{m_{bal} + m_{jobb} = 2016\ g}}$ kekszet tettünk. 2 pont

10./3. feladat.

A feladat megoldásához először azt kell meglátni,

- hogy a csőben az anyagok nyugalomban vannak, s ez csak akkor lehet, ha hidrosztatikai egyensúly áll fenn közöttük, avagy egyenlettel kifejezve a cső két szárában a nyomás megegyezik. 4 pont

A továbbiakban vezessük be a magasságmérés nullszintjét, és ez legyen a víz felszínének magassága a cső jobb oldali részében.

Ahhoz, hogy a hidrosztatikai nyomásokat kiszámolhassuk, először ki kell számolni azt, hogy mekkora az egyes folyadékoszlopok hossza.

- Mértékegység-átváltás után kijön, hogy l_{ciklo}=11 cm, l_{ism}=19 cm. 2x2 pont

- Kikeresendő a víz sűrűsége 20 °C-on, ami 0,998 *g/cm³*.
- Ekkor a nyomások:

$$p_{\text{jobb}} = p_{\text{bal}} \qquad (1.)$$

$$\rho_{\text{ism}} \cdot g \cdot l_{\text{ism}} = \rho_{\text{víz}} \cdot g \cdot h + \rho_{\text{ciklo}} \cdot g \cdot l_{\text{ciklo}} \qquad (2.)$$

$$\rho_{\text{ism}} \cdot l_{\text{ism}} = \rho_{\text{víz}} \cdot h + \rho_{\text{ciklo}} \cdot l_{\text{ciklo}} \qquad (3.)$$

$$\rho_{\text{ism}} \cdot = \left(\rho_{\text{víz}} \cdot h + \rho_{\text{ciklo}} \cdot l_{\text{ciklo}}\right) / l_{\text{ism}} \qquad (4.)$$

8 pont

Kiszámolva a fenti egyenlet alapján, az ismeretlen anyag sűrűsége a következő:

$$\rho_{\text{ism}} = 0{,}50226 \sim 0{,}5\ g/cm^3$$ 4 pont

Ha kiszámoljuk az egyes részek nyomását (víz esetében a 3 cm-es vízoszlopra), a következő értékeket kapjuk (g=9,81 m/s^2):

$$p_{\text{víz}} = 0{,}03 \cdot 9{,}81 \cdot 998 = 293{,}7\ \text{Pa} \sim 295\ \text{Pa}$$

$$p_{\text{ciklo}} = 0{,}11 \cdot 9{,}81 \cdot 778 = 839{,}54\ \text{Pa} \sim 840\ \text{Pa}$$

$$p_{\text{ism}} = p_{\text{víz}} + p_{\text{ciklo}} = 1133{,}25\ \text{Pa} \sim 1135\ \text{Pa}$$

A számolás során alkalmazott kerekítés miatt a kapott végeredmény, ha három tizedesjegyig számolunk), akkor is csak a harmadik értékes tizedesjegyben tér el, ami kisebb, mint 1%-os hibát jelent. A számolás ennek megfelelően jónak tekinthető, ha az első két értékes tizedesjegy egyezik, vagy ezekre kerekítve egyezést kapunk, azaz $\rho_{\text{ism}} \sim 0{,}50\ g/cm^3$.

10./4. feladat.

Adatok: $T_0 = 288$ K, $T_1 = 373$ K, $T_2 = 273$ K, $p_0 = 10^5$ Pa

$V_1 = 500\ \text{cm}^3$, $V_2 = 200\ \text{cm}^3$

a)

A kezdeti állapotban az állapotegyenlet:

$$p_0(V_1 + V_2) = N \cdot k \cdot T_0$$

$$N = \frac{p_0(V_1 + V_2)}{k \cdot T_0}$$

1 pont

A második állapotban:

$$N_1 = \frac{p \cdot V_1}{k \cdot T_1} \quad és \quad N_2 = \frac{p \cdot V_2}{k \cdot T_2}$$ 1 pont

$$N = N_1 + N_2$$ 1 pont

$$\frac{p_0 (V_1 + V_2)}{k \cdot T_0} = \frac{p \cdot V_1}{k \cdot T_1} + \frac{p \cdot V_2}{k \cdot T_2},$$

$$p = \frac{p_0 (V_1 + V_2)}{T_0} \frac{T_1 \cdot T_2}{T_2 \cdot V_1 + T_1 \cdot V_2} = 10^5 \, Pa \frac{700}{288} \frac{273 \cdot 373}{273 \cdot 500 + 373 \cdot 200}$$ 2 pont

$$\underline{\underline{p = 1,172 \cdot 10^5 \, Pa}}$$

A **d válasz** a helyes. 5 pont

b)

A sűrűségek változása:

$$p \cdot V = \frac{m}{m_0 N_A} k N_A T$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

$$\rho_1 = \frac{p \cdot M}{R \cdot T_1} \quad és \quad \rho_2 = \frac{p \cdot M}{R \cdot T_2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} = 1,367$$ 1 pont

Határozzuk meg a sűrűségeket:

M= 29 g/mol

$$\rho_1 = \frac{p \cdot M}{R \cdot T_1} = \frac{1,172 \cdot 10^5 \; Pa \cdot 29 \cdot 10^{-3} kg / mol}{8,31 J / molK \cdot 373 K} = \underline{\underline{1,096 \frac{kg}{m^3}}}$$ 1 pont

$$és \quad \rho_2 = \frac{p \cdot M}{R \cdot T_2} = \underline{\underline{1,498 \frac{kg}{m^3}}}$$ 1 pont

Az eredeti ρ_0 sűrűség:

$$\rho_0 = \frac{p_0 \cdot M}{R \cdot T_0} = \underline{1,212 \frac{kg}{m^3}}$$ 1 pont

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} = \underline{\underline{-9,57\%}} \quad és \quad \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_0} = \underline{\underline{23,6\%}}$$ 1 pont

Az állítások közül egyik sem hibás, tehát az **a válasz** a helyes. 5 pont

10./5. feladat.

A megadott kapcsolások közül az, amelyik Feri számára megfelelő, a B) kapcsolás. A feladat megoldása során elegendő azt belátni, hogy a B) kapcsolás helyes, ekkor jár a maximális pontszám (5+5 pont) a részfeladatra.

Először vizsgáljuk meg a kapcsolás eredő kapacitását, majd az egyes kondenzátorokra eső feszültséget akkor, ha 1000 V feszültséget kapcsolunk a kapcsolás kivezetéseire. Ha az 1000 V-os feszültséget rákapcsolva nem ütnek át a kondenzátorok, valamint a kapcsolás kapacitása is megfelelő, akkor az adott elrendezés megfelelő Feri számára.

A B) kapcsolás esetén az eredő kapacitás kiszámolásához helyettesítsük a párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokat egy olyan kondenzátorral, amely kapacitása megegyezik a két kondenzátor eredő kapacitásával, ami jelenesetben, mivel párhuzamosan vannak kapcsolva, 10 μF. Ezután alkalmazhatjuk a sorosan kapcsolt kondenzátorok eredő $C_{\text{eredő}}$ kapacitásának kiszámolására szolgáló reciprokos összefüggést:

$$C_{\text{eredő}} = \frac{1}{\frac{1}{5\ \mu\text{F}+5\ \mu\text{F}} + \frac{1}{25\ \mu\text{F}} + \frac{1}{50\ \mu\text{F}} + \frac{1}{25\ \mu\text{F}}} = 5\ \mu\text{F}$$ 1 pont

Azaz azt kaptuk, hogy a B) kapcsolás eredő kapacitása megfelelő Feri számára. Ezután már csak a kondenzátorokon eső feszültséget kell megvizsgálnunk. A helyettesített kondenzátor feszültsége, mivel párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokról van szó, megegyezik az 5 μF-os kondenzátorok mindenkori feszültségével. Ennek megfelelően a helyettesített kondenzátor átütési feszültsége is 600 V. 1 pont

Sorosan kapcsolt kondenzátorok esetén a kondenzátorokon lévő töltés egyenlő. Ennek a gondolatnak a segítségével kiszámolhatjuk az egyes kondenzátorokra eső feszültséget! Ha az egyes kondenzátorokon lévő töltés Q, és a teljes kapcsolásra kapcsolt feszültség U_0, illetve a C kapacitású kondenzátorra eső feszültség U(C), akkor a következőek lesznek igazak:

$$U(C) = \frac{Q}{C}$$

$$1000\ \text{V} = U_0 = \frac{Q}{C_{\text{eredő}}} = \frac{Q}{5\ \mu\text{F}}$$

Fejezzük ki Q-t a felső egyenletből!

$$Q = U_0 \cdot C_{\text{eredő}} = 5\ \text{mC} \rightarrow U(C) = \frac{5\ \text{mC}}{C}$$

Kezdjünk el számolni a helyettesített kapcsolásunkban.

$$U(10\ \mu\text{F}) = \frac{5\ \text{mC}}{10\ \mu\text{F}} = 500\ \text{V}$$ 1 pont

$$U(25\ \mu\text{F}) = \frac{5\ \text{mC}}{25\ \mu\text{F}} = 200\ \text{V}$$ 1 pont

$$U(50\ \mu\text{F}) = \frac{5\ \text{mC}}{50\ \mu\text{F}} = 100\ \text{V}$$ 1 pont

Azaz azt kaptuk, hogy valamennyi kondenzátor feszültsége kisebb 1000 V felkapcsolása esetén, mint az egyes kondenzátorok átütési feszültsége, azaz 600 V. Tehát rövid vizsgálatunk során beláttuk, hogy a **B kapcsolás** megfelel Peti céljainak. 5 pont

A következő feladatrész megoldásához valamennyi kapcsolás esetén ki kell számolni azt, hogy mekkora az eredő kapacitásuk, majd ennek segítségével kell kiszámolni azt, hogy mekkora feszültség alkalmazása esetén lesz akkora a feszültség az egyes kondenzátorokon, hogy átüssenek. Ez könnyen kiszámolható: ha kiszámoljuk a feszültségviszonyokat 1000 V esetén, akkor, mivel az egyes kondenzátorok feszültségei egyenesen arányosak a kapcsolás két végpontjára kapcsolt feszültséggel, a maximális feszültségű kondenzátor feszültségét egyenes arányossággal 600 V-ra belőve megadható az egész kapcsolás átütési feszültsége is. 1 pont

Tekintsük ezt a már kiszámolt B) kapcsoláson!

A legnagyobb feszültség, ami az egyik kondenzátoron esik, 500 V, 1000 V alkalmazása esetén. Mivel ez

egyenesen arányos a kapcsolás két pólusára adott feszültséggel, ha ez 600 V lesz, akkor éppen 600/500·1000=1200 V lesz az a legnagyobb feszültség, amit még a nélkül adhatok rá a rendszerre, hogy ott egyetlen kondenzátor is átütne. 1 pont

Tekintsük az eddigi számolásokat másik kapcsolásokon is!

A) A két, párhuzamosan kapcsolt kondenzátor kapacitása összeadódik, így együttes kapacitásuk 40 μF. Helyettesítsük a fent említett módon a két kondenzátort egy olyan kondenzátorral, amely eredő kapacitása egyezik azokéval, míg átütési feszültsége szintén 600 V. A kapcsolás eredő kapacitása ezután kiszámolható, három, egymással sorosan kapcsolt kondenzátor kapacitásaként:

$$C_{\text{eredő}} = \frac{1}{\frac{1}{20\ \mu\text{F}} + \frac{1}{20\ \mu\text{F}+20\ \mu\text{F}} + \frac{1}{20\ \mu\text{F}}} = 8\ \mu\text{F}$$

Azt kaptuk, hogy a kapcsolás eredő kapacitása 8 μF.

Ellenőrizzük az egyes kondenzátorok feszültségeit! Az egyes kondenzátorok feszültségei arányosak a kondenzátor kapacitásának reciprokával. Innen számolható a C kapacitású kondenzátorra eső U feszültség:

$$U(C) = \frac{8\ \mu\text{F}}{C} \cdot U_0$$

Ebből kiszámolható, hogy a 20 μF-os kondenzátorokra eső feszültség 400 V, míg a 40 μF-osra (a helyettesített kondenzátorra) eső feszültség 200 V. Ahhoz, hogy a legnagyobb feszültséggel bíró kondenzátor átüssön, a rá eső feszültségnek 600 V-nak, azaz a 400 V másfélszeresének kell lennie. Ennek megfelelően az első kapcsolás átütési feszültsége 1500 V. 1 pont

Hasonló számítások végezhetőek a többi kapcsolásra is.

C) A C) kapcsolás esetén számoljuk ki az egyes ágak eredő kapacitását, majd (fent említett) helyettesítésük után a két ág együttes kapacitását! Alkalmazva a sorosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitására vonatkozó törvényt először a bal, majd a jobb oldali ágra:

$$C_{\text{jobb}} = \frac{1}{\frac{1}{5\ \mu\text{F}} + \frac{1}{20\ \mu\text{F}}} = 4\ \mu\text{F} \qquad C_{\text{bal}} = \frac{1}{\frac{1}{2\ \mu\text{F}} + \frac{1}{2\ \mu\text{F}}} = 1\ \mu\text{F}$$

Ezeket összeadva, megkapjuk a helyettesítéseik párhuzamos kapcsolásának eredő kapacitását:

$$C_{\text{eredő}} = C_{\text{jobb}} + C_{\text{bal}} = 5\ \mu\text{F}$$

Azaz a kapcsolás kapacitása éppen 5 μF. Vizsgáljuk most az egyes kondenzátorokra eső feszültséget! Jelenesetben elegendő az eredeti kapcsolásban oldalanként vizsgálódni. Kezdjük a vizsgálatot a jobb oldallal!

A jobb oldal esetén egyszerű szimmetriai megfontolások alapján is látszik, hogy az egyes kondenzátorokra eső feszültség egyaránt 500 V, tehát nem ütnek át.

A bal oldal esetén pedig az előző résznél említett módszert alkalmazzuk.

$$1000\ \text{V} = U_0 = \frac{Q}{C_{\text{bal}}} = \frac{Q}{4\ \mu\text{F}} \rightarrow Q = U_0 \cdot C_{\text{bal}} = 4\ \text{mC}$$

$$U(5\ \mu\text{F}) = \frac{4\ \text{mC}}{5\ \mu\text{F}} = 800\ \text{V} > 600\ \text{V}$$

Vizsgáljuk meg a kondenzátorok átütését: 800 V feszültség esik az egyikre 1000 V rákapcsolása esetén. Ez azt jelenti, hogy ahhoz, hogy 800-ból 600 V, azaz éppen az átütési feszültség legyen, 750 V-ot kell rákapcsolni a kapcsolásra; azaz ekkora a kapcsolás átütési feszültsége. 1 pont

D) Vizsgáljuk meg a D) kapcsolást! A 10 μF-os kondenzátor két lába között közvetlenül húzódik egy vezeték, ami azt jelenti, hogy a kondenzátoron nem fog megjelenni feszültség, s így töltés sem; tehát a kapcsolásunkból ki is hagyhatjuk. Hasonlóan kihagyhatjuk a vezetékkel párhuzamos módon kapcsolt kondenzátorokat is. Ennek következtében a kapcsolás ekvivalens lesz egy 25 és egy vele sorosan kapcsolt 10 μF-os kondenzátor kapcsolásával. Ebben az esetben kiszámítható az eredő kapacitás, ami kb. 7,14 μF, míg a feszültség a kisebbik kondenzátoron kb. 5/7·1000=714 V esik. Ennek megfelelően kiszámolható, hogy a kapcsolás átütési feszültsége 1000/(5/7·1000/600)=840 V. 1 pont

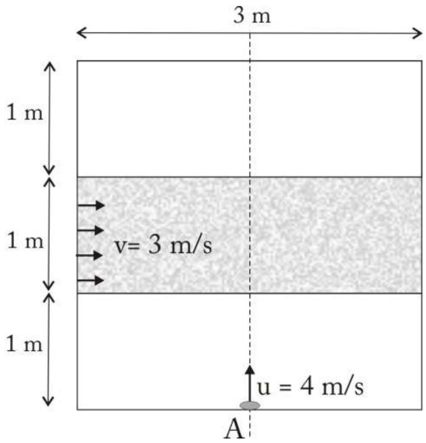
Azaz azt kaptuk, hogy az A) kapcsolás esetén lesz a legnagyobb az alkalmazható feszültség, ami pedig 1500 V. Helyes tehát a **d válasz**. 5 pont

XX. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny a református középiskolák számára, Hódmezővásárhely, 2016. március 19.

MEGOLDÁSOK

11. évfolyam

1. *Egy 3 m széles és 3 m hosszú vízszintes kísérletező asztal felszíne sík, középső d = 1 m szélességű középső sávját azonban v = 3 m/s sebességgel mozgó (végtelenített) gumiszalag képezi, amely pontosan illeszkedik az asztallap nyugvó felszínéhez. Az asztal egyik szélének közepére (az ábrán az A pontra) egy kicsiny lapos korongot fektetünk, és megütjük úgy, hogy u = 4 m/s sebességgel kezdjen csúszni (merőlegesen) a szalag felé. Az asztallap álló részei és a korong közti súrlódás elhanyagolható, a gumiszalag és a korong közötti súrlódási tényező μ = 0,5. A korong csúszás közben nem forog. Hol esik le a korong az asztalról?*



Megoldás:

Adatok: L = 3 m, l = 1,5 m, d = 1 m, v = 3 m/s, u = 4 m/s, μ = 0,5, g = 10 m/s^2.

a) Az első asztallapon a korong állandó sebességgel keresztülhalad és u = 4 m/s sebességgel érkezik a szalaghoz. Vizsgáljuk a szalagon való keresztülhaladást az asztalhoz rögzített koordinátarendszerben: az x tengely a szalag haladási iránya, az y tengely a merőleges irány (a korong belépő sebességének iránya), az origó, ahol a korong belép a szalagra. 1 pont

b) A korong x irányban 0 kezdősebességgel kerül a szalagra, és a súrlódás következtében (ha nem ér előbb keresztül a szalagon y irányban) végül felveszi a szalag sebességét, azaz x irányban a korongot a súrlódási erő gyorsítja. A korong y irányban 4 m/s sebességgel kerül a szalagra, és a súrlódás fékezi.

2 pont

Mozgás x irányban

$a_x = \mu g = 5$ m/s^2, $t = \dfrac{v}{\mu g} = 0{,}6$ s alatt veszi föl a korong a szalag sebességét. 2 pont

Mozgás y irányban

$v_y = u - \mu g t$

$y = u\,t - \dfrac{\mu g}{2} t^2$. 2 pont

Utóbbiból meghatározható az szalagon való keresztirányú áthaladás ideje:

$d = u\,t - \dfrac{\mu g}{2} t^2$, $\dfrac{\mu g}{2} t^2 - u\,t + d = 0$.

$$t = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2d \cdot \mu g}}{\mu g} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 2 \cdot 5}}{5}\ \text{s} = \frac{4 \pm 2{,}45}{5}\ \text{s}.$$

A két gyök t_1 = 1,29 s és t_2 = 0,31 s. A t_1 = 1,29 s esetén a korong végsebessége negatív, így a helyes időérték <u>0,31 s</u>. 4 pont

$v_y = u - \mu g t = (4 - 5{\cdot}0{,}31)$ m/s = <u>2,45 m/s</u>. 1 pont

Mivel 0,31 s < 0,6 s, a korong nem veszi föl a szalag sebességét, hanem a keresztülhaladás után az x irányú sebessége $v_x = \mu g t = 5{\cdot}0{,}31$ m/s = <u>1,55 m/s</u> értékű lesz, és 1 pont

$x = \dfrac{\mu g}{2} t^2 = 2{,}5{\cdot}0{,}31^2$ m = <u>0,24 m</u>-rel kerül jobbra a középvonaltól. 1 pont

c) A szalag utáni sima asztalon a korong egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (1,55; 2,45) m/s kezdősebességgel. 2 pont

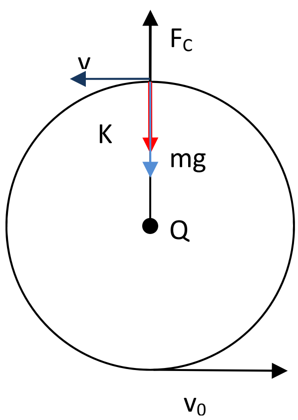
Vizsgáljuk meg, hol hagyja el az asztalt!

y irányban a keresztülhaladás ideje $t_y = \frac{1\,\text{m}}{2{,}45\,\text{m/s}} = 0{,}41$ s. 2 pont

Ennyi idő alatt x irányban 1,55 m/s·0,41 s = 0,64 m-rel kerül jobbra.
Tehát a korong az asztalt a felső élen a középvonaltól számítva (0,24 + 0,64) m = 0,88 m távolságban hagyja el. 2 pont

***2.** Vízszintes, szigetelő tengelyre felfűzött fémgyöngy töltése $Q = 10^{-6}$ C. A hozzá erősített $L = 30$ cm hosszú szigetelő fonál végén $m = 2$ g tömegű, $q = 10^{-7}$ C töltésű kicsi fémgolyó függ. Legalább mekkora kezdősebességet kell adnunk a fémgolyónak, hogy függőleges síkban egy teljes kört befusson, ha a töltések*
a) azonos előjelűek
b) ellentétes előjelűek?
c) Ha 3 m/s sebességgel indítjuk a kis golyót, és a töltések egyneműek, mekkora utat fut be a körpályán?

Megoldás:
Adatok: $Q = 10^{-6}$ C, $L = 0{,}3$ m, $m = 2$ g, $g = 10$ m/s², $q = 10^{-7}$ C, $v_0 = 3$ m/s.



a) A töltések azonos előjelűek.
A test akkor marad körpályán, ha a pálya legfelső pontjában a kötélerő nagysága nagyobb vagy egyenlő nullával. 1 pont
A körmozgás feltétele a felső pontban

$$\frac{mv^2}{L} = mg + K - F_C, \qquad (1)$$ 2 pont

ahol $mg = 2\cdot10^{-2}$ N, $F_C = k\frac{qQ}{L^2} = 10^{-2}$ N.

A sebesség meghatározásához felírhatjuk az energia megmaradást. Az elektrosztatikus mező energiáját nem kell figyelembe venni, mert az q és Q kölcsönös távolságától függ, és az a körpályán állandó.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg\cdot 2L \qquad (2)$$ 2 pont

(2)-ből $mv^2 = mv_0^2 - 4mgL$

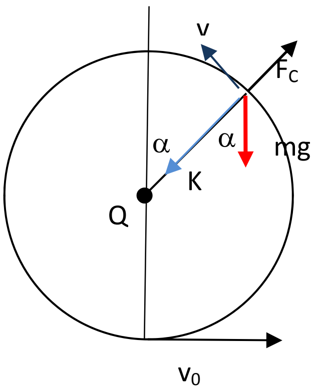
(1)-kifejezve K-t, és behelyettesítve mv^2-t:

$$K = \frac{mv^2}{L} - mg + F_C = \frac{mv_0^2}{L} - 5mg + F_C \geq 0$$

$v_0^2 \geq \frac{L}{m}(5mg - F_C)$, adatokkal $v_0 \geq$ 3,67 m/s. 3 pont

b) A töltések ellenkező előjelűek. Ez azonos az a) esettel, csak a formulákban F_C helyett $-F_C$ írandó.

$v_0^2 \geq \frac{L}{m}(5mg + F_C)$, adatokkal $v_0 \geq$ 4,02 m/s. 2 pont



c) A körmozgás feltétele, ha a golyó a függőlegessel α szöget bezáró helyzetben van:

$$\frac{mv^2}{L} = mg\cdot\cos\alpha + K - F_C. \qquad (1)$$ 2 pont

Az energiatétel:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg\cdot L(1 + \cos\alpha) \qquad (2)$$ 2 pont

A (2) egyenletből mv^2-et kifejezve és visszaírva (1)-be és K-re rendezve a következő összefüggést kapjuk:

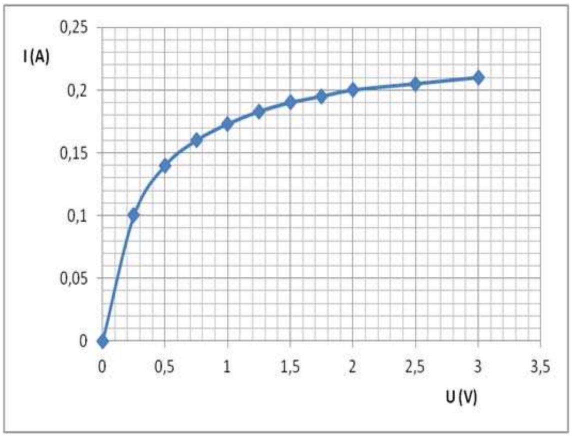
$K = \frac{mv_0^2}{L} - mg\,(2 + 3\cos\alpha) + F_C$ (3)

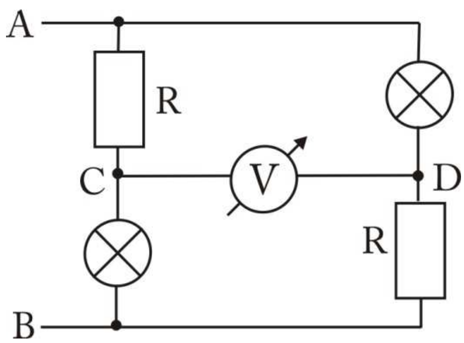
A golyó addig marad a körpályán, amíg a kötélerő nagysága nagyobb vagy egyenlő nullával.
Így a K = 0 egyenletből az α szög meghatározható:

$\cos\alpha = \frac{v_0^2}{3gL} + \frac{F_C}{3mg} - \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = 1 + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, $\underline{\underline{\alpha = 60°}}$ 4 pont

A golyó által befutott út a körpályán $s = L\pi - L\alpha = L(\pi - \frac{\pi}{3}) = L\frac{2\pi}{3}$ = 0,628 m. 2 pont

3. Kis izzólámpa feszültség-áram karakterisztikája látható a mellékelt ábrán. 3V-nál nagyobb feszültség esetén a lámpa kiég. Két ilyen izzóból és két egyenként 10 Ω-s ellenállásból a másik ábrán látható kapcsolást állítjuk össze. Az A és B pontok közé egyenfeszültséget kapcsolunk, amelynek értékét nulláról egyenletesen növeljük. A C és D pontok közé igen nagy ellenállású voltmérőt kapcsolunk és folyamatosan figyeljük, hogy mit mutat.
a) Milyen telepfeszültségnél fog az izzó kiégni?
b) Ábrázoljuk a voltmérő feszültségét a telepfeszültség függvényében!





Megoldás:
a) A lámpa akkor ég ki, amikor a rá eső feszültség 3 V, és a átfolyó áramerősség 0,21 A. A lámpa és az ellenállás sorba van kötve, így az ellenálláson eső feszültség 0,21·10 = 2,1 V. A telep feszültsége a lámpa és az ellenállás feszültségének összege, azaz 5,1 V.
Ezek szerint a lámpa 5,1 V telepfeszültségnél ég ki. 5 pont

b) Készítsünk táblázatot a megadott grafikon alapján:

U (V)	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3
I (A)	0	0,1	0,14	0,16	0,173	0,183	0,19	0,195	0,2	0,205	0,21

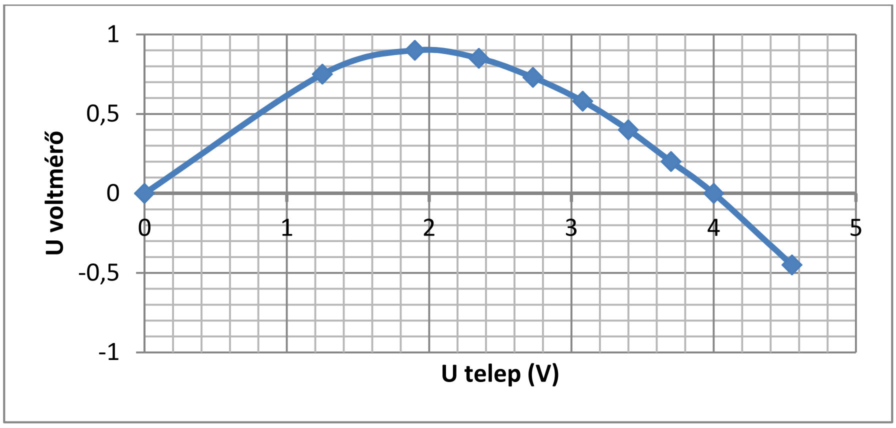
A kapcsolás szerint a lámpa és az ellenállás feszültségének összege tetszőleges áramértéknél megadja a telep feszültségét. A táblázatot egészítsük ki további sorokkal. Adott áramerősséghez vesszük a lámpa és az ellenállás feszültségének összegét (ez lesz a telep feszültsége U_0) 2 pont
és a feszültségek különbségét (Ezt mutatja a voltmérő U_v). 2 pont

U (V)	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3
I (A)	0	0,1	0,14	0,16	0,173	0,183	0,19	0,195	0,2	0,205	0,21
$U_R = I{\cdot}R$	0	1	1,4	1,6	1,73	1,83	1,9	1,95	2	2,05	2,1

$U_0 = U + U_R$	0	1,25	1,9	2,35	2,73	3,08	3,4	3,7	4	4,55	5,1
$U_V = U_R - U$	0	0,75	0,9	0,85	0,73	0,58	0,4	0,2	0	-0,45	-0,9

táblázat készítése 6 pont

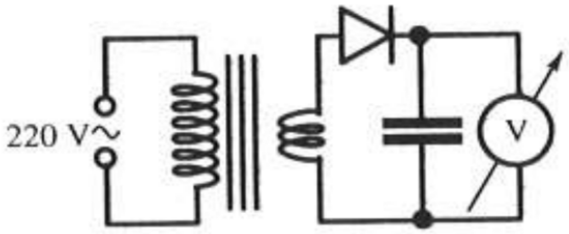
A feladatban kívánt grafikont a táblázat alsó két sora segítségével készíthetjük el:



5 pont

4. TESZT

Az ábrán látható elrendezésben a transzformátor szekunder tekercsén tízszer kevesebb menet van mint a primer tekercsen. A voltmérő belső ellenállása igen nagy. A hálózat frekvenciája 50 Hz.



Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. Válaszunkat minden egyes állítás esetén indokoljuk.

I. A transzformátor szekunder feszültsége:

1. *A transzformátor szekunder tekercsén a menetszám arányának megfelelően 10-szer akkora feszültség jelenik meg.*
2. *A transzformátor szekunder tekercsén a menetszám arányának megfelelően 10-ed akkora feszültség jelenik meg.*
3. *A transzformátor szekunder tekercsén a váltakozó feszültség csúcsértéke éppen 220/10 V azaz 22V lesz.*
4. *A transzformátor szekunder tekercsén megjelenő váltakozó feszültség időfüggése* $U(t) = 22\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(2\pi\cdot 50\, t)$ *V lesz.*

II. Mit mutat a voltmérő?

1. *Ha nem lenne ott a dióda a szekunder körben, akkor ugyanazt az effektív feszültséget mérnénk, mint ami a transzformátor szekunder tekercsén megjelenik.*
2. *A dióda egyenirányító hatása miatt a frekvencia a felére csökken és így a voltmérő a szekunder feszültség felét mutatja.*
3. *A voltmérő nem mutat feszültséget, hiszen nincs ohmos ellenállás az áramkörben.*
4. *A voltmérő 22 V-ot mutat.*
5. *A voltmérő* $22\cdot\sqrt{2}$ *V-ot mutat.*
6. *Ha a szekunder körből kivesszük a kondenzátort a voltmérő* $22/\sqrt{2}$ *V-ot mutat.*

Megoldás:

I.1 **HAMIS** - Transzformátor esetén a primer és szekunder feszültségek aránya azonos a menetszámok arányával.

I.2 **IGAZ** - Transzformátor esetén a primer és szekunder feszültségek aránya azonos a menetszámok arányával

I.3 **HAMIS** - A megadott 220 V effektív feszültség, így a 22 V is effektív érték, és nem a csúcsérték.

I.4 **IGAZ** - A primer feszültség szinuszos, csúcsértéke 220 V$\cdot\sqrt{2}$, ami transzformálódik az a feszültség amplitúdója, a frekvenciafüggés nem változik.

II.1 **IGAZ** – a kondenzátor jelenléte nem befolyásolja a feszültség effektív értékét, csak fázistolást okoz a feszültség és az áram közt.

II.2 **HAMIS** - a dióda egyenirányító hatása azt jelenti, hogy a szinusz függvény alsó felét "levágja", így félperiódusonként a szekunder feszültség nulla. Ez azonban nem változtatja meg a frekvenciát.

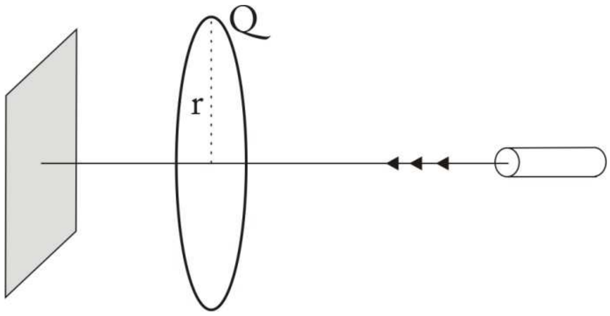
II.3 **HAMIS** - az ideális voltmérő két pont közti feszültségkülönbséget mér, ellenállás jelenléte nélkül is.

II.4 **HAMIS** - a voltmérő akkor mutatná a 22 V-nyi effektív feszültséget, ha a szekunder körben nem volna sem kondenzátor, sem egyenirányító.

II.5 **IGAZ** - A kondenzátor az első negyed periódusban feltöltődik, de kisülni nem tud, mert az áram iránya az egyenirányító miatt nem fordul meg. A feltöltődés nem az effektív feszültség, hanem a csúcsfeszültség eléréséig tart.

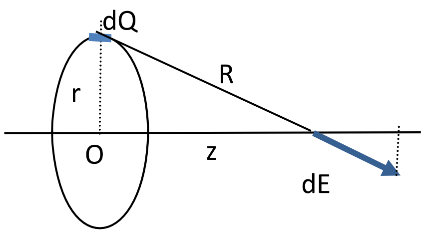
II.6 **IGAZ** - Szimplán az egyenirányító miatt a szekunder körben más lesz az effektív feszültség értéke. A csúcsfeszültség $\sqrt{2}$ -ed része helyett, a csúcsfeszültség fele lesz. Azaz valóban a voltmérő 22/$\sqrt{2}$ V-ot mutatna.

12. évfolyam



***1.** Magfizikai kísérlet során egy részecskeágyúból azonos tömegű, 3,2·10^{-19} C töltésű részecskéket tudunk kilőni. A részecskeágyú egy r = 10 cm sugarú, Q = 10^{-6} C töltésű vékony fémkarika szimmetriatengelyén helyezkedik el, a karika középpontjától 2 m távolságra. A karika mögött fluoreszkáló ernyő érzékeli a becsapódó részecskéket. Az elvégzett kísérletek szerint a részecskék csak akkor érik el az ernyőt, ha a kilövési sebességük nagyobb, mint 2,87·10^{6} m/s. Az egész berendezés vákuumban van.*
a) Határozzuk meg a kilőtt részecskék tömegét!
b) Milyen részecskék szerepelnek a kísérletben?

Megoldás:
Adatok: q = 3,2·10^{-19} C, r = 10 cm, Q = 10^{-6} C, d = 2 m, $v_0 \geq$ 2,87·10^{6} m/s.
A karika által keltett elektrosztatikus mező taszítja a részecskéket, így amelyek eljutnak a karika középpontjáig majdnem nulla sebességgel, azok már az ernyőt is elérik. 2 pont



A tengely z pontjában a körvonal egy kis darabjának dQ pontszerűnek tekinthető töltésétől származó térerősség Coulomb törvénye alapján:

$$dE = k\frac{dQ}{r^2+z^2} = k\frac{dQ}{R^2}$$

(Az eredő térerősség z irányú, ennek meghatározására azonban nincs szükségünk.)
A dQ töltéstől származó potenciál

$$dU = k\frac{dQ}{\sqrt{r^2+z^2}} = k\frac{dQ}{R}$$ 5 pont

Az elektrosztatikus mezőkre érvényes a szuperpozíció elve, így összeadva a ponttöltések potenciálját megkapjuk a karika elektrosztatikus potenciálját a tengelyen:

$$U = k\frac{Q}{\sqrt{r^2+z^2}} = k\frac{Q}{R}.$$ 3 pont

Érvényes az energia-megmaradás, amelyet a kezdeti $z = d$ távolságra és a karika O pontjára (z = 0) írhatunk fel:

$$\frac{mv_0^2}{2} + k\frac{qQ}{\sqrt{r^2+d^2}} = 0 + k\frac{qQ}{r}.$$ 5 pont

Ebből kifejezhető a részecske tömege:

$$m = \frac{2kqQ}{v_0^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}}\right)$$

Adatokkal:

$$m = \frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-6}}{2{,}87^2\cdot 10^{12}}\cdot\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{\sqrt{10^{-2}+2^2}}\right)\text{ kg} = \underline{\underline{6{,}64\cdot 10^{-27}\text{ kg}}}.$$ 3 pont

b) Összevetve ezt az tömegértéket a részecske töltésével, a részecskeágyú $\underline{\underline{\alpha\text{-részecskéket}}}$ lő ki.
2 pont

***2**. Izotópos lemezvastagság mérőben a lemez az izotóp és a GM cső között halad, közvetlenül a GM cső ablaka előtt. A sugárzás elenyésző vastagságú levegőrétegen halad át, elnyelődés csak a lemezben történik. A készülék sugárforrása 6,8 nCi aktivitású Tl-204 izotóp, amely elektronokat sugároz. A sugárforrás és az ablak távolsága 5 mm, a kör alakú ablak sugara 4 mm. Az* *alumíniumlemez áthaladása során a GM cső átlagosan 553 beütésszámot jelez percenként. Az alumíniumban az elektronsugár felezési távolsága $8{,}148\cdot10^{-2}$ mm. Mekkora a lemez átlagos vastagsága? (1 Ci = $3{,}7\cdot10^{10}$ Bq)*

Megoldás:
Adatok: A = 6,8 nCi = 6,8·37,03 Bq = 251,85 Bq = 15 111 /perc, a sugárforrás Tl-204, felezési ideje 3,78 év, így a mérés közben az aktivitás nem változik.
r = 4 mm, R = 5 mm, N_{GM} = 553 /perc = 9,22 /s.
$\delta = 8{,}148\cdot10^{-2}$ mm.

A sugárforrás minden irányban sugároz (a teljes gömbfelületen, $F = 4\pi R^2$), de a GM csövet az ablak köre által a gömbfelületből kivágott gömbsüveg felszínén átmenő elektronok érik el. A gömbsüveg felszíne

$F^* = 2\pi Rm$, ahol $m = R - \sqrt{R^2 - r^2} = 5 - 3 = 2$ mm. 6 pont

$N_1 = A\dfrac{F^*}{F} = A\dfrac{2\pi Rm}{4\pi R^2} = A\cdot0{,}2 = 3022$ /perc = 50,37 /s elektron érné a számlálót, ha a lemez nem volna a forrás és a GM cső között. 6 pont

Ha a lemez az ablak előtt van, akkor a számlálóba csak
$N_2 = N_1\,2^{-d/\delta}$ részecske jut el, tehát $N_2 = N_{GM}$. 4 pont

Az utóbbi egyenletet d-re megoldva:

$d = \delta\cdot\dfrac{\ln(N_1/N_2)}{\ln 2} = 8{,}148\cdot10^{-2}\dfrac{\ln(5{,}46)}{\ln 2}$ mm= <u>0,199 mm</u> ≈ 0,2 mm. 4 pont

<u>Megjegyzés:</u> Ha a gömbsüveg felszín helyett a GM cső ablakának területét vesszük figyelembe, akkor

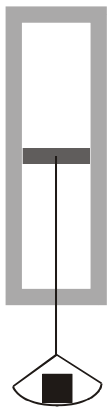
$F^* = r^2\pi$, így $\dfrac{F^*}{F} = \dfrac{\pi r^2}{4\pi R^2} = 0{,}16$ 3 pont

$N_1 = A\dfrac{r^2\pi}{4\pi R^2} = 2417{,}77$ /perc = 40,29 /s. 6 pont

Ha a lemez az ablak előtt van, akkor a számlálóba csak
$N_2 = N_1\,2^{-d/\delta}$ részecske jut el, tehát $N_2 = N_{GM}$. 4 pont

$d = \delta\cdot\dfrac{\ln(N_1/N_2)}{\ln 2} = 8{,}148\cdot10^{-2}\dfrac{\ln(4{,}37)}{\ln 2}$ mm = <u>0,173 mm</u>.4 pont

3. *Az ábrán látható hőszigetelő falú, A=10 cm² keresztmetszetű, függőleges két végén zárt csövet elhanyagolható tömegű, hővezető dugattyú oszt két egyforma részre. A két féltérben azonos mennyiségű, $p_0 = 10^5$ Pa nyomású egyatomos gáz van. A dugattyú vékony hőszigetelt zsinórral egy serpenyőhöz csatlakozik, amelybe m = 10 kg tömegű testet helyezünk és a rendszert magára hagyjuk. A zsinór úgy van kivezetve, hogy az alsó térrészből nem tud a gáz kiszökni. A dugattyú mozgása egy idő után a kicsiny súrlódás miatt megszűnik.*
a) Hányszorosára nő a dugattyú fölött a gáz térfogata?
b) Mekkora ez az arány, ha $\dfrac{mg}{A} \gg p_0$?



Megoldás:
Adatok: $p_0 = 10^5$ Pa, f =3, m = 10 kg, $A = 10^{-3}$ m², g = 10 m/s².
a) Kezdő állapotban legyenek az állapotjelzők p_0, V_0, T_0 mindkét térrészben. A dugattyú megállása után a felső részben az állapotjelzők p_1, $V_0 + \Delta V$, T; az alsó térrészben p_2, $V_0 - \Delta V$, T. Mivel a dugattyú hó hővezető, a végső hőmérséklet a két térrészben azonos lesz. 2 pont
Az állapotegyenletek

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1(V_0 + \Delta V)}{T} \qquad (1)$$

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2(V_0 - \Delta V)}{T} \qquad (2) \qquad \text{2 pont}$$

A dugattyú egyensúlyban van:

$$p_2 = p_1 + \frac{mg}{A} \qquad (3) \qquad \text{2 pont}$$

Vezessük be a $\Delta p = \frac{mg}{A} = \frac{10 \cdot 10}{10^3}$ Pa = 10^5 Pa (= p_0) jelölést, így $p_2 = p_1 + \Delta p$.

További összefüggésre is szükségünk van. Használjuk föl, hogy a rendszer energiája azért változik, mert a nehézségi erő munkát végez rajta.

$$\Delta E = mg \cdot \frac{\Delta V}{A} = \Delta p \cdot \Delta V \qquad \text{2 pont}$$

$$\Delta E = 2 \cdot \frac{3}{2} nR(T - T_0) = 3\, p_1(V_0 + \Delta V) - 3\, p_0 \cdot V_0 = \Delta p \cdot \Delta V \qquad (4)$$

(1) és (2) -t egyenlővé téve és (3)-at beírva kapjuk, hogy

$$p_1(V_0 + \Delta V) = (p_1 + \Delta p)(V_0 - \Delta V) \qquad (1^*)$$

(4)-t rendezve:

$$3 \cdot p_1(V_0 + \Delta V) = 3\, p_0 \cdot V_0 + \Delta p \cdot \Delta V \qquad (2^*)$$

(1*)-ból p_1 kifejezhető:

$$p_1 = \frac{\Delta p}{2\Delta V}(V_0 - \Delta V),$$

ezt behelyettesítjük (2*)-ba. Rendezés után ΔV-re a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$0 = 5\Delta p \cdot \Delta V^2 + 6\, p_0 \cdot V_0 - 3\, \Delta p\, V_0^2. \qquad \text{5 pont}$$

$$\Delta V = \frac{-6 p_0 V_0 \pm \sqrt{36 p_0^2 V_0^2 + 60 V_0^2 \Delta p^2}}{10 \Delta p} \qquad (*)$$

$\Delta V > 0$, és használjuk fel, hogy $\Delta p = p_0$. Ekkor

$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{-6 + \sqrt{36 + 60}}{10} = 0{,}38$, így a felső részben a gáz térfogata 1,38-szorosára nő. 2 pont

b) Ha $\Delta p >> p_0$, akkor (*) eredményben tagonként osztva Δp-vel, látható, hogy a $\frac{p_0}{\Delta p}$ tagok nullához tartanak, és csak a harmadik tag marad meg

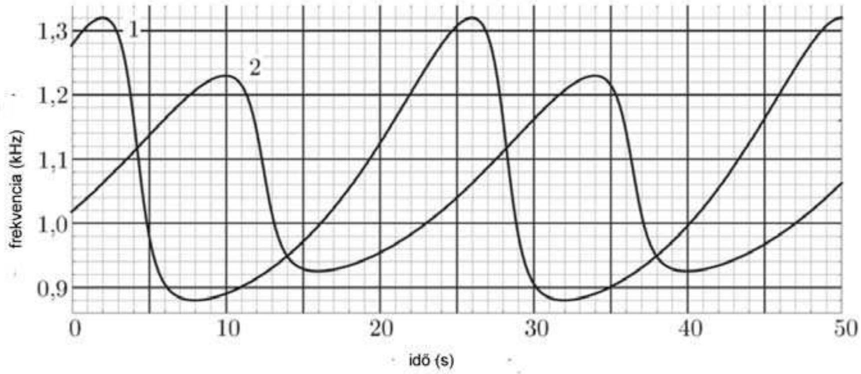
$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sqrt{60}}{10} = 0{,}77$, tehát a felső térrészben a gáz térfogata legföljebb 1,77-szeresre tud nőni.

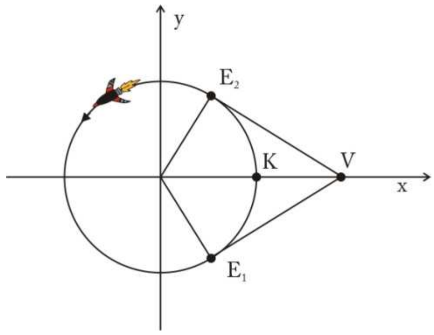
5 pont

4. TESZT

Egy akciófilmben a terroristák betörnek a rakétabázisra és kilőnek egy rakétát. A rakétát előzőleg úgy állították be, hogy kilövés után állandó sebességgel körpályán mozogjon a föld felszínéhez igen közeli vízszintes síkban. A rakéta állandó frekvenciájú hangjelet bocsát ki, amelyet két különböző helyen lévő vevőállomáson mérnek. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a vevőállomások a rakéta mozgási síkjába esnek.

A vevőállomáson mért hangjel frekvenciáját az idő függvényében rádióhullámok segítségével küldik a Központba, ahol az alábbi valós idejű ábrát látják a monitoron.





A rakéta körmozgását az $\mathbf{r}(t) = (R\cdot\cos(\omega t), R\cdot\sin(\omega t))$ *helyvektorral írjuk le. (A rakéta t = 0 időpillanatban a K pontban van.)*

A rakéta által kibocsátott alapfrekvencia a Doppler-effektus következtében módosul. A frekvencia változás szempontjából a mozgó forrás megfigyelő irányába eső sebességkomponense számít, ami a körmozgást végző rakéta esetén folyamatosan változik. A mért jel periódusideje megegyezik a körmozgás periódusidejével.

Szimmetria okokból a maximális és a minimális frekvencia számításánál ugyan akkora nagyságú, de ellentétes irányú lesz a megfigyelő irányába eső v_p *sebességkomponens, amely a Doppler- effektus szempontjából számít, így a minimális és a maximális frekvencia* $f_{min,\,max} = f_0 \cdot \frac{1}{1 \pm v_p / c}$.

Számításokkal igazolható, hogy a Doppler effektus szempontjából lényeges v_p *megfigyelő irányú sebességkomponensnek a* $\cos(\omega t) = \frac{(d^2 + R^2) \pm (d^2 - R^2)}{2dR}$ *föltételnek megfelelő időpontban lesz szélsőértéke, ahol d a vevőállomás origótól vett távolsága.*

A fönti ábrán az E_1 *és az* E_2 *pontokat a megfigyelőtől a körhöz húzott érintő határozza meg.*

Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. Válaszunkat minden egyes állítás esetén indokoljuk.

1. *A grafikon alapján* f_0 *értéke meghatározható és kb. 1,05 kHz-nek adódik.*
2. *A két vevő esetén különböző* v_p *adódik a grafikon alapján, ami annak a következménye, hogy a két megfigyelő egymáshoz képest valamilyen szögben áll.*
3. *A megadott formulák alapján, ha a vevő az ábra szerinti V pontban van, akkor éppen az* E_1 *és* E_2 *érintési pontokból érkező jel esetén lesz a frekvenciának szélsőértéke.*
4. *A fönti jelölésekkel az* E_1 *pontból érkező jel frekvenciája maximális, míg az* E_2 *pontból érkező jelé minimális.*
5. *Mindkét vevő az ábrán vázolt módon a rakéta által leírt körön kívül helyezkedik el.*

Megoldás:

1. A grafikon alapján f_0 értéke meghatározható és kb. 1,05 kHz-nek adódik. – **IGAZ**

A szövegben leírt információk alapján $f_{\min} = f_0 \cdot \frac{1}{1+v_p/c}$. és $f_{\max} = f_0 \cdot \frac{1}{1-v_p/c}$, ahonnan

$\frac{1}{f_{\min}} + \frac{1}{f_{\max}} = \frac{2}{f_0}$, illetve $\frac{1}{f_{\min}} - \frac{1}{f_{\max}} = \frac{2}{f_0} \cdot \frac{v_p}{c}$ adódik. Így a grafikonról leolvasott adatokból f_0 meghatározható. A grafikonról leolvasott $f_{\min}$ = 0,88 kHz és $f_{\max}$ = 1,32 kHz, vagy az $f_{\min}$ = 0,92 kHz és $f_{\max}$ = 1,23 kHz értékpárok alapján f_0 = 1,056 kHz-nek illetve f_0 = 1,053 kHz-nek adódik.

2. A két vevő esetén különböző v_p adódik a grafikon alapján, ami annak a következménye, hogy a két megfigyelő egymáshoz képest valamilyen szögben áll. – **HAMIS**

$\frac{1}{f_{\min}} - \frac{1}{f_{\max}} = \frac{2}{f_0} \cdot \frac{v_p}{c}$ alapján a föntebb leolvasott értékekkel számolva $v_p/c = 0,2$ és $v_p/c = 0,144$ adódik. De a különbséget nem a vevők egymással bezárt szöge okozza, hanem a körtől vett különböző távolság miatt lesz más és más a maximális vevő irányú sebességkomponens értéke. (A szög éppenséggel a jelek egymáshoz képesti eltolódásában mutatkozik meg.)

3. A megadott formulák alapján, ha a vevő az ábra szerinti V pontban van, akkor éppen az E_1 és E_2 érintési pontokból érkező jel esetén lesz a frekvenciának szélsőértéke. – **IGAZ**

A megadott formula szerint $\cos(\omega t) = \frac{d}{R}$ vagy $\cos(\omega t) = \frac{R}{d}$ esetén van szélsőértéke a vevő irányú sebességkomponensnek. A cos függvény definíciója alapján a második eset az ábrán is vázolt helyzet. Az első esetben a vevő az E_1 és E_2 x-tengellyel vett metszéspontjában áll.

4. A fönti jelölésekkel az E_1 pontból érkező jel frekvenciája maximális, míg az E_2 pontból érkező jelé minimális. – **IGAZ**

E_1 ponttól a K pontig a forrás közelít, így az alapfrekvenciához képest nagyobb frekvenciát hallunk, majd a K ponttól az E_2 pontig távolodik így az alapfrekvenciához képest alacsonyabb frekvenciát hallunk.

De érvelhetünk a grafikon menetével is: a maximumtól a minimumig rövidebb idő telik el, mint fordítva, ennek rövidebb körív felel meg. Így E_1 pontban van a maximum, míg E_2 pontban a minimum.

5. Mindkét vevő az ábrán vázolt módon a rakéta által leírt körön kívül helyezkedik el.– **HAMIS**

A minimális és maximális frekvencia értéket mindkét vevő 6 s különbséggel érzékeli, ami a teljes 24 s periódusidő negyede. Ha mindkét vevő kívül vagy belül lenne, akkor egyforma kellene legyen a minimum és maximum frekvencia értéke, hisz ugyan olyan messze lennének a körtől. Mivel nem ez a helyzet, az egyik kívül van, míg a másik belül.