XVII. TORNYAI SÁNDOR ORSZÁGOS FIZIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY A REFORMÁTUS KÖZÉPISKOLÁK SZÁMÁRA

Hódmezővásárhely, 2013. március 22-24.

9. évfolyam.

1. feladat.

Egy Jaguar fékezésekor….

s = 290 m, $a = 3{,}90\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, m = 2150 kg.

v_0= ? F = ? μ = ? t_{min} = ?

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2a} \quad \rightarrow \underline{\underline{v_0}} = \sqrt{2as} = 47{,}56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \underline{\underline{47{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}} = 171{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$ 5 pont

$$F = m \cdot a = 2150\ \mathrm{kg} \cdot 3{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{8385\ N} \approx \underline{\underline{8400\mathrm{N}}}$$ 5 pont

$$\mu = \frac{F}{mg} = \frac{8385\ N}{2150\ kg \cdot 9{,}81\,\dfrac{m}{s^2}} = \underline{\underline{0{,}40}}$$ 5 pont

$$t_{\min} = \frac{v_0}{a} = \underline{\underline{12{,}2\ \mathrm{s}}}$$ 5 pont

2. feladat.

Adatok: $A_0 = 4\ \text{cm}^2$, $v_0 = 6\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, $h = 1$ m, $x = 1$ m, $g = 10\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A függőleges hajítás egyenletéből a lap eléréséig eltelt idő: $t_1 = \dfrac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = 0,2$ s.

2 pont.

A sebesség ekkor: $v_1 = v_0 - gt_1 = 4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

1 pont.

Figyelembe kell vennünk, hogy a vízsugár áramerőssége állandó: $A_0 v_0 = A_1 v_1$,

így a keresztmetszet a lapra érkezéskor: $A_1 = \dfrac{A_0 v_0}{v_1} = 6\ \text{cm}^2$.

2 pont.

A lapra kifejtett erőlökés és az egységnyi víztérfogat lendületváltozásának egyenlőségéből:
$F\Delta t = m\Delta v \rightarrow F\Delta t = \rho V \Delta v = \rho(A_1 v_1 \Delta t)\Delta v$

5 pont.

Ha a vízsugár egyenletesen oszlik el a felületen, akkor: $\Delta v = v_1 - 0 = v_1$

1 pont.

Behelyettesítés és egyszerűsítés után: $F_1 = \rho A_1 v_1^2 = 1000\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6\ \text{cm}^2 \cdot \left(4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \underline{\underline{9,6\ \text{N}}}$

2 pont.

A feladat megoldása akkor is helyesnek tekinthető, ha a kezdeti egységnyi víztérfogattal számol, azaz: $F_1 = \rho A_1 v_1^2 = \rho A_0 v_0 v_1 = 9,6$ N

Vízszintes esetben a sebesség vízszintes hajítás szerint számolandó: $v_{2,x} = v_0$.

A függőleges laphoz érkezésig eltelt idő: $t_2 = \dfrac{x}{v_{2,x}} = 0,167$ s.

1 pont.

A sebesség függőleges komponense: $v_{2,y} = gt_2 = 1,67\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

1 pont.

Az eredő sebesség: $v_2 = \sqrt{v_{2,x}^2 + v_{2,y}^2} = \underline{\underline{6,23\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

1 pont.

Az új keresztmetszet: $A_2 = \dfrac{A_0 v_0}{v_2} = 3,85\ \text{cm}^2$.

2 pont.

A falfelületre azonban csak a vízszintes irányú sebességkomponens megváltozása hat:
$F_2 = \rho A_2 v_2 v_{2,x} = 1000\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3,85\ \text{cm}^2 \cdot 6,23\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{14,4\ \text{N}}}$

2 pont.

Ez esetben is helyes a kezdeti egységnyi víztérfogattal történő számolás:
$F_2 = \rho A_2 v_2 v_{2,x} = \rho A_0 v_0 v_{2,x} = 14,4$ N

3. feladat.

Adatok: $M = 1,2$ kg, $m = 20$ g, $h = 0,8$ m, $x = 3$ m, $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A vízszintes hajítás függőleges elmozdulásából a hajítás ideje számolható:

2 pont.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,40 \text{ s}$$

4 pont.

Ha ezalatt vízszintesen x = 3 m-t tett meg, akkor vízszintes irányú sebessége:

$$v_x = \frac{x}{t} = 7,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4 pont.

A lövedék és a fakocka tehát ekkora sebességgel repül le az asztalról. Az impulzusmegmaradás értelmében a lövedék becsapódás előtti lendületére felírhatjuk:

4 pont.

$$mv_0 = (M + m)v_x,$$

4 pont.

amiből a lövedék kezdeti sebessége adódik:

$$v_0 = \frac{(M+m)v_x}{m} = 457,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 458\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2 pont.

4. feladat.

A)

$$\Delta v_A = 4\frac{m}{s} - (-5\frac{m}{s}) = \underline{9\frac{m}{s}}$$

$$\Delta v_B = 0\frac{m}{s} - (-5\frac{m}{s}) = \underline{5\frac{m}{s}}$$

Az A esetben nagyobb a sebesség változása.
Ha jól számolta, de a másik irányt vette pozitívnak, akkor a kapott értékek negatívok lesznek.
Ha a kisebb abszolút értékűt tekinti nagyobbnak, akkor is adjuk meg a pontot. 5 pont

B)

A lendület változása arányos a sebességváltozással, így az A esetben nagyobb a lendület változása:

$$\Delta I_A = m \cdot \left(4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - (-5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\right) = \underline{m \cdot 9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$\Delta I_B = m \cdot \left(0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - (-5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\right) = \underline{m \cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$\Delta I_A > \Delta I_B$$ 5 pont

C)

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad \rightarrow \qquad F_A = \frac{\Delta I_A}{\Delta t} > F_B = \frac{\Delta I_B}{\Delta t}$$

Az erő arányos a lendület változással, ha az idők azonosak, így ismét az A esetben nagyobb a keresett érték. 5 pont

D)

Ha az autók deformációja külön –külön azonos a B esetbelivel, akkor azonos mozgási energia emésztődött fel a deformáció alatt egy-egy kocsinál, azaz az ütközés előtt ugyancsak 5-5 m/s volt a két kocsi sebessége. 5 pont

5. feladat.

l_N= 1,5 l_K, T_N= 1 h= 3600 s, T_K= 12 h= 12 T_N

A) $\omega_N = \dfrac{2\pi}{T_N} \quad \omega_K = \dfrac{2\pi}{T_K} \quad \rightarrow \dfrac{\omega_N}{\omega_K} = \dfrac{T_K}{T_N} = 12$

Helyes válasz: **c**.

5 pont.

B) $v_N = \dfrac{2\pi}{T_N} l_N \quad v_K = \dfrac{2\pi}{T_K} l_K \quad \rightarrow \dfrac{v_N}{v_K} = \dfrac{T_K}{T_N}\dfrac{l_N}{l_K} = 12 \cdot 1,5 = 18$

A helyes válasz: **c**.

5 pont.

C) $a_N = \left(\dfrac{2\pi}{T_N}\right)^2 \cdot l_N \quad a_K = \left(\dfrac{2\pi}{T_K}\right)^2 \cdot l_K \quad \rightarrow \dfrac{a_N}{a_K} = \left(\dfrac{T_K}{T_N}\right)^2 \dfrac{l_N}{l_K} = 12^2 \cdot 1,5 = 216$

Helyes válasz: **b**.

5 pont.

D) $a_N = \left(\dfrac{2\pi}{T_N}\right)^2 \cdot l \quad a_K = \left(\dfrac{2\pi}{T_K}\right)^2 \cdot l \quad \rightarrow \dfrac{a_N}{a_K} = \left(\dfrac{T_K}{T_N}\right)^2 = 12^2 = 144$

A szögsebességek nem függnek a tengelytől mért távolságtól, A) szerint ez az érték 12-szeres. A sebességek arány azonos sugár mellet arányos a szögsebességgel, ezért itt is 12-szeres az arány.
Helyes válasz: **a**.

5 pont.

XVII. TORNYAI SÁNDOR ORSZÁGOS FIZIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY A REFORMÁTUS KÖZÉPISKOLÁK SZÁMÁRA

Hódmezővásárhely, 2013. március 22-24.

10. évfolyam.

1. feladat.

m = 2 kg, M= 32 g, p_0= 500 kPa, T_0= –30°C= 243 K, n =62,5 mol
c_p= 0,916 kJ/kg·K, c_v= 0,653 kJ/kg·K,

Az első lépés után a jellemzők p_1, V_1, T_1
A dugattyú szabadon el tud mozdulni, ezért a nyomás állandó:

$p_1 = p_0 = 500\,kPa,\quad V_1 = 2\cdot V_0,$

$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1} \quad\rightarrow\quad T_1 = \frac{V_1}{V_0}T_0 = \underline{486\ \text{K}}$ 3 pont

$Q_1 = c_p m\left(T_1 - T_0\right) = 916\,\frac{J}{kg\cdot K}\,2\,kg\cdot 243\,K = \underline{445,2\ \text{kJ}}$, vagy

$N = \frac{m}{M}N_A = 3,75\cdot 10^{25},\ Q_1 = \frac{7}{2}N\cdot k\left(T_1 - T_0\right) = \underline{440,1\,\text{kJ}}$ 5 pont

A második lépésben a dugattyú áll, vagyis a térfogat állandó:

$V_2 = V_1\ \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}\quad és\quad p_2 = 2p_1 \quad\rightarrow\quad T_2 = \frac{p_2}{p_1}T_1 = 2T_1 = 4T_0 = \underline{\underline{972\ \text{K}}}$ 3 pont

$Q_1 = c_v m\left(T_2 - T_1\right) = 653\,\frac{J}{kg\cdot K}\,2\,kg\cdot 486\,K = \underline{634,7\ \text{kJ}}$, vagy

$Q_2 = \frac{5}{2}N\cdot k\left(T_2 - T_1\right) = \underline{628,8\ \text{kJ}}$ 5 pont

A kezdetitől a végállapotig közölt hő:

$Q = Q_1 + Q_2 = 1079,9\,kJ \approx \underline{\underline{1080\ \text{kJ}}}$, vagy

a részecskeszám felhasználásával:

$Q = Q_1 + Q_2 = 1068,9\,kJ \approx \underline{\underline{1070\ \text{kJ}}}$ 2 pont

A végső térfogat:

$p_1\cdot V_1 = \frac{m}{M}N_A k T_1 \quad\rightarrow\quad V_1 = V_2 = \frac{N\cdot k\cdot T_1}{p_1} = \underline{\underline{0,505\ \text{m}^3}}$ 2 pont

2. feladat.

Jelölje a T_1 = 300 K, T_2 = 500 K és T_3 = 720 K hőmérsékletű levegő tömegét rendre m_1, m_2 és m_3.

A 300 K és 500 K hőmérsékletű levegő hőcseréjével a közös hőmérséklet 420 K, ez alapján az energiamegmaradás törvényét felhasználva m_1 és m_2 aránya számolható. Kihasználjuk, hogy a fajhő minden esetben azonos, c_v.

2 pont.

Az m_1 tömegű gáz hőmérsékletváltozása: $\Delta T_{1,a}$ = 420 K – 300 K = 120 K

1 pont.

Az m_2 tömegű gáz hőmérsékletváltozása: ΔT_2 = 500 K – 420 K = 80 K

1 pont.

$$m_1 c_v \Delta T_{1,a} = m_2 c_v \Delta T_2 \rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{\Delta T_{1,a}}{\Delta T_2} = \frac{120}{80} = \underline{1,5}$$

2 pont.

A 300 K és 720 K hőmérsékletű levegő hőcseréjével a közös hőmérséklet 600 K, ez alapján m_1 és m_3 aránya számolható.

Az m_1 tömegű gáz hőmérsékletváltozása: $\Delta T_{1,b}$ = 600 K – 300 K = 300 K

1 pont.

Az m_2 tömegű gáz hőmérsékletváltozása: ΔT_3 = 720 K – 600 K = 120 K

1 pont.

$$m_1 c_v \Delta T_{1,b} = m_3 c_v \Delta T_3 \rightarrow \frac{m_3}{m_1} = \frac{\Delta T_{1,b}}{\Delta T_3} = \frac{300}{120} = \underline{2,5}$$

2 pont.

A 720 K és 500 K hőmérsékletű levegő keveredésekor legyen T_K a közös hőmérséklet:

$$m_2 c_v (T_K - T_2) = m_3 c_v (T_3 - T_K)$$

1 pont.

Az m_2 és m_3 tömegeket behelyettesítve m_1 segítségével, átrendezés után:

$$T_K = \frac{T_2 \cdot 1,5 m_1 + T_3 \cdot 2,5 m_1}{1,5 m_1 + 2,5 m_1} = 637,5 \text{ K} \approx \underline{\underline{638 \text{ K}}}$$

4 pont.

A gáz belső energiája $E = \frac{f}{2} NkT = c_v mT$ alakban írható fel, így

$$E_1 = c_v m_1 T_1 = c_v m_1 \cdot 300 \text{ K}$$

$$E_2 = c_v m_2 T_2 = c_v \cdot 1,5 m_1 \cdot 500 \text{ K} = c_v m_1 \cdot 750 \text{ K}$$

$$E_3 = c_v m_3 T_3 = c_v \cdot 2,5 m_1 \cdot 720 \text{ K} = c_v m_1 \cdot 1800 \text{ K}$$

A gázok belső energiái 300:750:1800 (vagyis 2:5:12) arányban állnak egymással.

5 pont.

3. feladat.

Adatok: $A_0 = 4\ \text{cm}^2$, $v_0 = 6\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $h = 1$ m, $x = 1$ m, $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A függőleges hajítás egyenletéből a lap eléréséig eltelt idő: $t_1 = \dfrac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = 0,2$ s.

2 pont.

A sebesség ekkor: $v_1 = v_0 - gt_1 = 4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

1 pont.

Figyelembe kell vennünk, hogy a vízsugár áramerőssége állandó: $A_0 v_0 = A_1 v_1$,

így a keresztmetszet a lapra érkezéskor: $A_1 = \dfrac{A_0 v_0}{v_1} = 6\ \text{cm}^2$.

2 pont.

A lapra kifejtett erőlökés és az egységnyi víztérfogat lendületváltozásának egyenlőségéből:
$F\Delta t = m\Delta v \rightarrow F\Delta t = \rho V \Delta v = \rho(A_1 v_1 \Delta t)\Delta v$

5 pont.

Ha a vízsugár egyenletesen oszlik el a felületen, akkor: $\Delta v = v_1 - 0 = v_1$

1 pont.

Behelyettesítés és egyszerűsítés után: $F_1 = \rho A_1 v_1^2 = 1000\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6\ \text{cm}^2 \cdot \left(4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \underline{\underline{9,6\ \text{N}}}$

2 pont.

A feladat megoldása akkor is helyesnek tekinthető, ha a kezdeti egységnyi víztérfogattal számol, azaz: $F_1 = \rho A_1 v_1^2 = \rho A_0 v_0 v_1 = 9,6$ N

Vízszintes esetben a sebesség vízszintes hajítás szerint számolandó: $v_{2,x} = v_0$.

A függőleges laphoz érkezésig eltelt idő: $t_2 = \dfrac{x}{v_{2,x}} = 0,167$ s.

1 pont.

A sebesség függőleges komponense: $v_{2,y} = gt_2 = 1,67\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

1 pont.

Az eredő sebesség: $v_2 = \sqrt{v_{2,x}^2 + v_{2,y}^2} = \underline{\underline{6,23\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}}$.

1 pont.

Az új keresztmetszet: $A_2 = \dfrac{A_0 v_0}{v_2} = 3,85\ \text{cm}^2$.

2 pont.

A falfelületre azonban csak a vízszintes irányú sebességkomponens megváltozása hat:
$F_2 = \rho A_2 v_2 v_{2,x} = 1000\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3,85\ \text{cm}^2 \cdot 6,23\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{14,4\ \text{N}}}$

2 pont.

Ez esetben is helyes a kezdeti egységnyi víztérfogattal történő számolás:
$F_2 = \rho A_2 v_2 v_{2,x} = \rho A_0 v_0 v_{2,x} = 14,4$ N

4. feladat.

Ha a végtelen távoli pontban a potenciál 0, akkor a ponttöltéstől *r* távolságra (ez itt egy általános távolságadatot jelez) a térerősség és a potenciál

$E = k\dfrac{Q}{r^2} \quad és \quad U = k\dfrac{Q}{r}$.

Ha a fémgömb fel van töltve, akkor a fenti összefüggések érvényesek lesznek, ha *r* nem kisebb, mint a gömb sugara, vagyis a gömb felszínén és a felszínétől távolodva is érvényes.

A) $U_R = k\dfrac{Q}{R}$ *és* $U_r = k\dfrac{Q}{r}$, *mivel* $r < R$ $U_R < U_r$

A helyes válasz **c**. 5 pont

B) $E_R = k\dfrac{Q}{R^2}$ *és* $E_r = k\dfrac{Q}{r^2}$, *mivel* $r < R$ $E_R < E_r$

A helyes válasz **c**. 5 pont

C) A helyes válasz **b**. 5 pont

D) Ha összeérintjük a két gömböt, akkor a felületük azonos potenciálú lesz, ehhez az kell, hogy a kisebb sugarú gömbről töltés menjen át a nagyobb sugarúra. Ezzel a nagyobb sugarún nagyobb lesz a töltés, mint kezdetben volt.
A helyes válasz **b**. 5 pont

5. feladat.
A) az *AD* és *BC* szakaszokon a nyomás állandó, így azok izobár folyamatok, *pV* diagrammon az abszcissza (*V*) tengellyel párhuzamos szakaszok.
Az *AB* és *DC* szakaszokon a nyomás és a hőmérséklet aránya állandó, ez akkor jöhet létre, ha a térfogat állandó, azaz a folyamatok izochor jellegűek, *pV* diagrammon az ordináta (*p*) tengellyel párhuzamos szakaszok.
Az egyesített gáztörvény alapján a *D* és a *C* állapotokban a térfogat kétszerese az *A* (és *B*) állapotbeli V_0 térfogatnak.
Ezek alapján a helyes grafikon a **c**. 5 pont

B) A hőfelvételek az egyes szakaszokon:

$$Q_{A\to B} = C_v(2T_0 - T_0) = \frac{5}{2} NkT_0$$

$$Q_{B\to C} = C_p(4T_0 - 2T_0) = \frac{5+2}{2} Nk2T_0 = 7NkT_0$$

$$Q_{A\to D} = C_p(2T_0 - T_0) = \frac{5+2}{2} NkT_0 = \frac{7}{2} NkT_0$$

$$Q_{D\to C} = C_v(4T_0 - 2T_0) = \frac{5}{2} Nk2T_0 = 5NkT_0$$

A helyes válasz **b**. 5 pont

C) Az a válasz igaz ugyan, de <u>nem a feltett kérdésre válaszol</u>, ezért hibás.
A hőmennyiségek aránya

$$\frac{Q_{A\to B\to C}}{Q_{A\to D\to C}} = \frac{\frac{5}{2} NkT_0 + 7NkT_0}{\frac{7}{2} NkT_0 + 5NkT_0} = \frac{19}{17}$$

A helyes válasz **c**. 5 pont
Az a és c válaszok együttes bekarikázása esetén 4 pont javasolt.

D) A kérdéses arányok:

$$\frac{W_{A\to B\to C}}{Q_{A\to B\to C}} = \frac{2p_0(2V_0 - V_0)}{\frac{5}{2} NkT_0 + 7NkT_0} = \frac{4}{19} \approx 0,211$$

$$\frac{W_{A\to D\to C}}{Q_{A\to D\to C}} = \frac{p_0(2V_0 - V_0)}{\frac{7}{2} NkT_0 + 5NkT_0} = \frac{2}{17} \approx 0,118$$

Kihasználtuk az állapotegyenlet adta egyszerűsítési lehetőséget, azaz hogy $p_0V_0 = NkT_0$.

A kettő különbsége $\frac{4}{19} - \frac{2}{17} = \frac{30}{323} \approx 0,093$.

A helyes válasz **d**. 5 pont

XVII. Tornyai Sándor Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny a református középiskolák számára 2013 MEGOLDÁSOK

A megoldásban csak ott írjuk ki a mértékegységeket, ahol eltérünk az SI-től. A nehézségi gyorsulás értékét a számolásokban mindenütt $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$-nek vesszük.

11. osztály

1. Feladat:

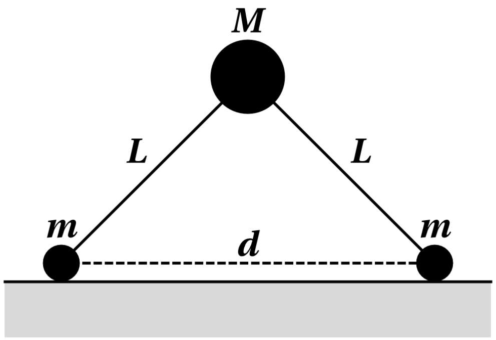
Elhanyagolható tömegű egyforma hosszú vékony rudakból és m és M tömegű golyókból az ábra szerinti csuklós szerkezetet állítottuk össze. A golyók síkja végig függőleges, az asztal és golyók között nincs súrlódás, a golyókat tekintsük tömegpontnak. A szerkezet szétcsúszását az alsó golyók közt kifeszített fonal akadályozza meg. A fonalat elégetjük.

Adatok: $L = 0,5\,\mathrm{m}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $M = 2\,\mathrm{kg}$, $d = 0,707\,\mathrm{m}$.

a) Mekkora ebben a pillanatban a rudakban ható erő, és a talajra kifejtett nyomóerő? **(10 p)**

b) Mekkora gyorsulással indulnak meg az egyes golyók? **(6 p)**

c) Mekkora sebességgel csapódik az asztalra a középső golyó? **(4 p)**

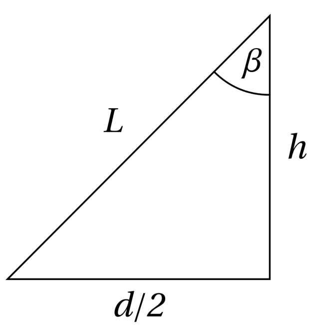


Megoldás:

Adatok: $L = 0,5\,\mathrm{m}$; $m = 1\,\mathrm{kg}$; $M = 2\,\mathrm{kg}$; $d = 0,707\,\mathrm{m}$.

Ad a) A megfelelő erőkomponensek kiszámításához szükségünk van a háromszög valamely szögére.

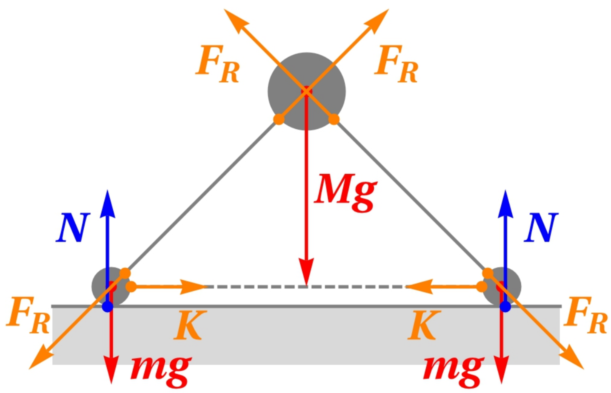
Az oldalélek függőlegessel bezárt β szögét kiszámíthatjuk a jobb oldali ábrán külön is kirajzolt derékszögű háromszög segítségével:



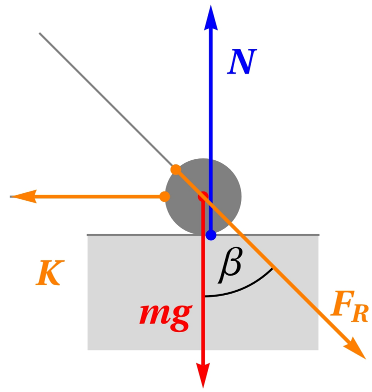
$$\sin\beta = \frac{d/2}{L} = \frac{0,707}{2\cdot 0,5} = 0,707 \quad \Rightarrow \quad \beta = 44,99^\circ = 45^\circ$$

Tehát a fonal elégetésének pillanatában a karos csuklók derékszöget zárnak be egymással.

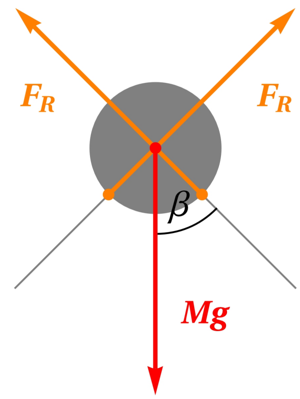
Először tekintsük úgy a rendszert, hogy a fonal még nincs elégetve. Ekkor a golyók egyensúlyban vannak, és a ráható erők eredője nulla. **(2 p)**



A golyókra ható erők. **(2 p)**



Kis golyó



Nagy golyó

Az M tömegre ható erők egyensúlyából $M \cdot g = 2F_R \cos\beta$ amiből $F_R = M \cdot g \cdot 0,707 = \underline{\underline{14,14\,\text{N}}}$.

(2 p)

A kis golyóra ható erők vízszintes komponensei: $K = F_R \cos\beta = Mg/2 = 20\,\text{N}$.
A kis golyóra ható erők függőleges komponensei: $N = mg + F_R \sin\beta = 10\,\text{N} + 20/2\,\text{N} = 20\,\text{N}$.

Így az asztalra két golyó összesen $2 \cdot N = \underline{\underline{40\,\text{N}}}$ erővel hat. **(4 p)**

(összesen = 10 p)

Ad b) A kötél elégetésének pillanatában az erők már nincsenek egyensúlyban és a testek mozogni kezdenek. Az elégetés pillanatát úgy vehetjük, hogy a kötélerő hirtelen megszűnik, de a többi erő még (és a szög is) változatlan marad.

A nagy golyóra az erők továbbra is egyensúlyban vannak, így **a nagy golyó gyorsulása az elengedés pillanatában 0**. A nagy golyó egyébként mivel szimmetria okból a rúdban ébredő erők vízszintes komponensei egyformák maradnak, csak függőlegesen tud mozogni. **(3 p)**

A kis golyó az asztal, mint kényszer miatt, csak vízszintesen tud mozogni (azaz a függőleges erők továbbra is egyensúlyt tartanak), így mozgásegyenlete az indulás pillanatában: $m \cdot a = F_R \cos\beta = \frac{Mg}{2}$, és mivel $m = \frac{M}{2}$, gyorsulása $a = g = \underline{\underline{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$. **(3 p)**

(összesen = 6 p)

Ad c) A rendszer úgy mozog, hogy a tömegközéppontja függőlegesen esik lefelé, a kis golyó mozgása így valójában összetehető két mozgásból: a tömegközéppont függőleges mozgásából és egy forgásból. Ezek eredője éppen a vízszintes mozgás. Amikor a középső golyó leér, a kis golyó forgásból származó sebessége éppen függőleges lesz, azaz a vízszintes sebessége megszűnik. Mivel nincs súrlódás, a nagy golyó leérésének sebessége meghatározható a rendszerre felírt energiamegmaradásból.

Kezdetben a rendszer helyzeti energiája megegyezik a végén a nagy golyó mozgási energiájával:

$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2$$

Ahonnan a sebességre:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot g \cdot L \cdot \cos\beta} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{5\sqrt{2}} = \underline{\underline{2,659\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

ha nincs indoklás, akkor csak 2 p. **(összesen = 4 p)**

2. Feladat:

Függőleges helyzetű $0,5\,\mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű hőszigetelő falú hengerben alul $0,1\,\mathrm{mol}$ $300\,\mathrm{K}$ hőmérsékletű metán, felül $0,1\,\mathrm{mol}$ $600\,\mathrm{K}$ oxigéngáz található. A kétféle gázt könnyű, hővezető dugattyú választja el. Az oxigént a külső levegőtől egy $50\,\mathrm{kg}$ tömegű hőszigetelő dugattyú választja el. Mindkét dugattyú könnyen mozog. A külső levegő nyomása $p_k = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

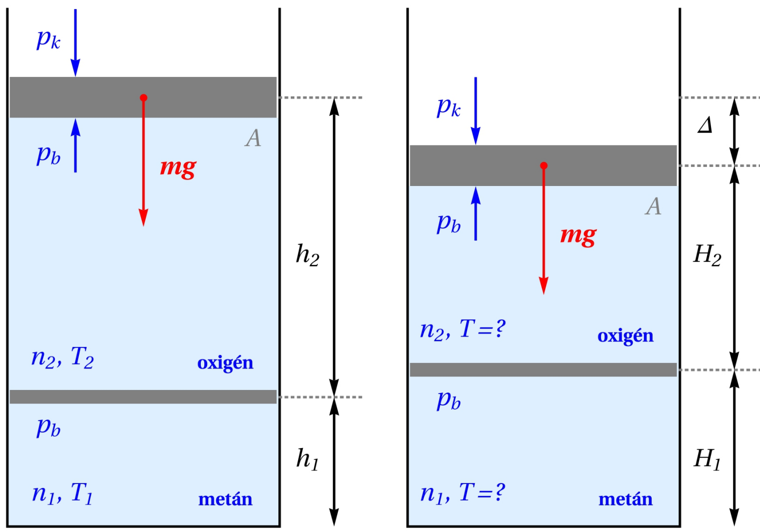
a) Mekkora kezdetben a gázok nyomása? **(4 p)**

b) Mennyivel mozdul el a felső dugattyú, ha sokáig várunk? **(6 p)**

c) Mekkora lesz a két gáz hőmérséklete az egyensúly beállta után? **(10 p)**

Megoldás:

Adatok: $A = 0,5\,\mathrm{dm}^2 = 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$; $n_1 = 0,1\,\mathrm{mol}$; $T_1 = 300\,\mathrm{K}$; $n_2 = 0,1\,\mathrm{mol}$; $T_2 = 600\,\mathrm{K}$; $m = 50\,\mathrm{kg}$; $p_k = 10^5\,\mathrm{Pa}$.



Ad a) Számoljuk ki a kezdetben uralkodó belső nyomást.

$$p_b = p_k + \frac{mg}{A} = 10^5 + \frac{50\cdot 10}{5\cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{2\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}}. \qquad \textbf{(2 p)}$$

Mivel a külső nyomás és a dugattyú súlya változatlan, **a belső nyomás végig állandó marad a folyamat során**. **(2 p)**

(összesen = 4 p)

Ad c) Először a közös hőmérsékletet kell meghatároznunk, hiszen csak utána tudunk valamit mondani a megváltozott térfogatoktól.

Mivel a könnyű dugattyú a gázok közt nem hőszigetelő, a melegebb oxigén gáz hőt fog átadni a hidegebb metánnak, mindaddig amíg ki nem egyenlítődik a hőmérséklet-különbség.

Pontosabban a melegebb oxigén gáz belső energiájának csökkenése árán hőt ad át a hidegebb metánnak miközben állandó nyomáson csökken a térfogata (azaz munkavégzés is van!). A kapott hőt a metán egyrészt a belső energia (azaz a hőmérséklet) növelésre fordítja, másrészt valamennyit tágul is.

Állandó nyomáson a leadott, avagy felvett hő az első fő tétel ($\Delta E_b = Q - p\Delta V$) alapján az alábbi módon számítható:

$$Q = \Delta E_b + p\Delta V = \frac{f}{2} nR\Delta T + nR\Delta T = \frac{f+2}{2} nR\Delta T (= c_p nR\Delta T)$$

Így kihasználva, hogy a metán által felvett hő nagysága megegyezik az oxigén által leadott hő nagyságával (előjel!)

$$Q_{\text{fel}} = -Q_{\text{le}}$$

$$\frac{f_1+2}{2} n_1 R(T - T_1) = -\frac{f_2+2}{2} n_2 R(T - T_2) \qquad \textbf{(4 p)}$$

Az oxigén szabadsági foka: $f_2 = 5$, míg a metáné: $f_1 = 6$. **(2 p)**

Kihasználva továbbá, hogy $n_1 = n_2$ és elvégezve az egyszerűsítéseket:

$$\frac{6+2}{2}(T - T_1) = -\frac{5+2}{2}(T - T_2)$$

Innen kifejezve a keresett T közös hőmérsékletet:

$$8 \cdot (T - T_1) = 7 \cdot (T_2 - T) \quad \Rightarrow \quad (8+7) \cdot T = (7 \cdot T_2 + 8 \cdot T_1) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{(7 \cdot T_2 + 8 \cdot T_1)}{15}$$

Behelyettesítve **(4 p)**

$$T = \frac{(7 \cdot 600 + 8 \cdot 300)}{15} = \underline{\underline{440\,\mathrm{K}}}.$$

(összesen = 10 p)

Ad b) A gázok állapotegyenletéből kiszámítható a dugattyúk helyzete.

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R \quad \Rightarrow \quad h = \frac{n \cdot R}{p \cdot A} \cdot T$$

Az ábra jelöléseit használva:

$$h_1 = \frac{n_1 \cdot R}{p_b \cdot A} \cdot T_1 = \frac{0,1 \cdot 8,31}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \cdot 300 = 0,2493 = 24,93\,\mathrm{cm}$$

$$h_2 = \frac{n_2 \cdot R}{p_b \cdot A} \cdot T_2 = \frac{0,1 \cdot 8,31}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \cdot 600 = 0,4986 = 49,86\,\mathrm{cm}$$

Mivel a gázok nyomása nem változik, az egyetemes gáztörvény alapján:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_1'}{T} \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{T}{T_1} \cdot h_1$$
$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_2'}{T} \quad \Rightarrow \quad H_2 = \frac{T}{T_2} \cdot h_2 \qquad \textbf{(4 p)}$$

Tehát a dugattyú helyzetében történt változás:

$$\Delta = (h_1 + h_2) - (H_1 + H_2) = h_1(1 - \frac{T}{T1}) + h_2(1 - \frac{T}{T2})$$

Behelyettesítve:

$$\Delta = 0,2493(1 - \frac{440}{300}) + 0,4986(1 - \frac{440}{600}) = 0,01662\,\mathrm{m} = \underline{\underline{1,66\,\mathrm{cm}}}.$$

Azaz a gázokat elzáró nehéz dugattyú $1,66\,\mathrm{cm}$-rel kerül lejjebb. **(2 p)**

(összesen = 6 p)

Másik megoldás (lényegében azonos az előzővel)

$n_1 = n_2 = n$, $p_b = p = 2 \cdot 10^5$ Pa végig állandó.

Ad c) Előbb célszerű meghatározni a közös hőmérsékletet, és utána a felső dugattyú elmozdulását. Mivel a két gáz közti dugattyú nem hőszigetelő, a hőmérséklet kiegyenlítődik. A gázok állapotegyenletei a folyamat elején és a végén:

$$pV_1 = nRT_1 \quad \rightarrow \quad pV_2 = nRT_2$$
$$pV_1' = nRT \quad \rightarrow \quad pV_2' = nRT \qquad \textbf{(4 p)}$$

Utóbbi két egyenletből látszik, hogy $V_1' = V_2'$, azaz $H_1 = H_2$.

Ez egy magára hagyott rendszer, így a rendszer összes energiája megmarad.
A folyamat elején ($f_1 = 6$, $f_2 = 5$): **(2 p)**

$$E_0 = \frac{6}{2}nRT_1 + \frac{5}{2}nRT_2 = nR\left(3T_1 + \frac{5}{2}T_2\right) = 2400 \cdot nR. \qquad \textbf{(2 p)}$$

A folyamat végén:

$$E = nR\left(3 + \frac{5}{2}\right)T + p\Delta V, \qquad \textbf{(2 p)}$$

mivel a dugattyú elmozdulása miatt a gázokon munkavégzés is van, ahol

$$\Delta V = (V_1' + V_2') - (V_1 + V_2) = \frac{2nRT}{p} - \frac{nR}{p}(T_1 + T_2) = \frac{nR}{p}(2T - T_1 - T_2). \qquad \textbf{(1 p)}$$

$E = E_0$, azaz

$$2400 \cdot nR = 5,5nRT + nR(2T - 900).$$

Ahonnan

$$T = \frac{3300}{7,5} = \underline{\underline{440\,\mathrm{K}}}. \qquad \textbf{(4 p)}$$

Ad b)

$$\Delta V = \frac{nR}{p}(2T - T_1 - T_2) = -\frac{nR}{p}\cdot 20 = -8,31\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3\,.$$

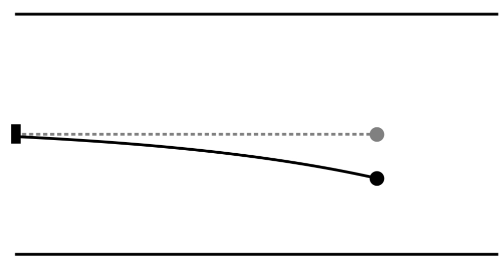
(a nehéz dugattyú lejjebb került)

A dugattyú elmozdulása

$$\Delta = \frac{\Delta V}{A} = \frac{8,31\cdot 10^{-5}}{5\cdot 10^{-3}} = 1,662\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{1,66\,\mathrm{cm}}}. \qquad \textbf{(1 p)}$$

3. Feladat:

Vékony, eredetileg vízszintes kvarcszál végére $0,1\,\mathrm{g}$ tömegű testet erősítünk. Ekkor a lehajlás $0,2\,\mathrm{cm}$. Az elrendezést az ábra szerint vízszintesen álló kondenzátorlapok közé tesszük, a lapok távolsága $3\,\mathrm{cm}$. A testet $10^{-7}\,\mathrm{C}$ töltéssel feltöltjük.

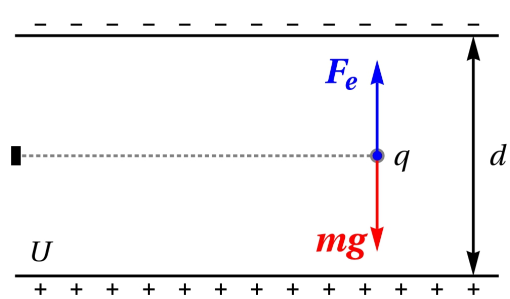


a) Mekkora és milyen polaritású feszültséget kell a lapokra kapcsolni ahhoz, hogy a kvarcszál visszanyerje deformációmentes egyensúlyi helyzetét? **(10 p)**

b) A test mozgását úgy indítjuk, hogy az előbb számított feszültséget a lapokra kapcsoljuk. Mekkora amplitúdójú és frekvenciájú rezgőmozgás alakul ki? **(10 p)**

Megoldás:

Adatok: $m = 0,1\,\mathrm{g} = 10^{-4}\,\mathrm{kg}$; $\Delta x_0 = 0,2\,\mathrm{cm} = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$; $d = 3\,\mathrm{cm} = 3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$; $q = 10^{-7}\,\mathrm{C}$.



Ad a) Tudjuk, hogy a kondenzátor feszültsége és a lapok közt kialakuló homogén elektromos mező térerőssége közt az összefüggés:

$$U = E\cdot d. \qquad \textbf{(2 p)}$$

A ponttöltésre ható elektromos erő kifejezhető a kondenzátor feszültségével:

$$F_e = q\cdot E = \frac{q\cdot U}{d}. \qquad \textbf{(2 p)}$$

Ez az erő tart egyensúlyt a gravitációs erővel:

$$F_e = m\cdot g. \qquad \textbf{(2 p)}$$

Ahonnan a keresett feszültség már könnyen kifejezhető:

$$\frac{q\cdot U}{d} = m\cdot g \quad \Rightarrow \quad U = \frac{m\cdot g\cdot d}{q} = \frac{10^{-4}\cdot 10\cdot 3\cdot 10^{-2}}{10^{-7}} = \underline{\underline{300\,\mathrm{V}}}. \qquad \textbf{(4 p)}$$

(összesen = 10 p)

Ad b) A rezgés amplitúdója megegyezik a feszültség nélküli lehajlás nagyságával, hiszen olyan helyzetből indítjuk a mozgást, ahol a sebesség nulla volt:

$$A = \Delta x_0 = \underline{\underline{0,2\,\mathrm{cm}}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

A nehézségi erő mindenütt megegyezik a ponttöltésre ható elektromos erővel, így azok hatása kioltja egymást. A tömegpont a kvarcszálban ébredő rugalmas erő hatására ($F_r = D \cdot \Delta x$) kezd harmonikus rezgő mozgásba.

A mozgásegyenlet tehát :

$$\underbrace{(m \cdot g - F_e)}_{0} - D \cdot x = m \cdot a \qquad \textbf{(2 p)}$$

(Ahol x az egyensúlyi helyzettől való kitérés.)

A mozgásegyenletből adódik a rugalmas-állandó és a körfrekvencia közötti kapcsolat:

$$D = m\omega^2$$

Innen tudjuk majd meghatározni a keresett frekvenciát.

A kezdeti, elektromos erő nélküli lehajlásból kiszámítható a rugalmas-állandó:

$$m \cdot g = D \cdot \Delta x_0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{m \cdot g}{\Delta x_0} = \frac{10^{-4} \cdot 10}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \qquad \textbf{(2 p)}$$

Innen a körfrekvencia kiszámítható:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0,5}{10^{-4}}} = \sqrt{5000}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 70,71\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

A rezgés frekvenciája pedig innen:

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{5000}}{2\pi} = \underline{\underline{11,254\,\mathrm{Hz}}} \qquad \textbf{(2 p)}$$

(összesen = 10 p)

Teszt: Indoklás nélküli jó válasz 2 pont.

Rendelkezésre áll 3 darab kondenzátor. Kapacitásuk $1\,\mu$F, $5\,\mu$F és $10\,\mu$F, átütési feszültségük $500\,$V. A három kondenzátort minden lehetséges módon (soros illetve párhuzamos kombinációkban) összekapcsoljuk.

1. Mekkora a rendszerre kapcsolható legnagyobb feszültség figyelembe véve az összes esetet? **(5 p)**

   A. $\underline{\underline{800\,\mathrm{V}}}$

   B. $650\,$V

   C. $500\,$V

2. A maximálisan elérhető legnagyobb feszültség akkor valósul meg, ha **(5 p)**

   A. két kondenzátor soros, a harmadik velük párhuzamos (ezen esetek valamelyike),

B. mind a három sorban van kötve,

C. két párhuzamos, a harmadik velük sorosan kötött (ezen esetek valamelyike),

D. mind a három párhuzamosan van kötve.

A 3. ÉS 4. KÉRDÉSNÉL TÖBB JÓ VÁLASZ IS LEHETSÉGES!

3. A felsorolt vegyes kapcsolások közül melyikhez tartozik a legnagyobb feszültség? **(5 p)**

A. $1\,\mu$F és $10\,\mu$F párhuzamosan, az $5\,\mu$F utána sorosan,

B. $1\,\mu$F és $10\,\mu$F sorosan, az $5\,\mu$F velük párhuzamosan,

C. $5\,\mu$F és $10\,\mu$F párhuzamosan, az $1\,\mu$F utána sorosan,

D. $5\,\mu$F és $10\,\mu$F sorosan, az $1\,\mu$F velük párhuzamosan.

4. A felsorolt vegyes kapcsolások közül melyikhez tartozik a legkisebb feszültség? **(5 p)**

A. $1\,\mu$F és $5\,\mu$F párhuzamosan, a $10\,\mu$F utána sorosan,

B. $1\,\mu$F és $5\,\mu$F sorosan, a $10\,\mu$F velük párhuzamosan,

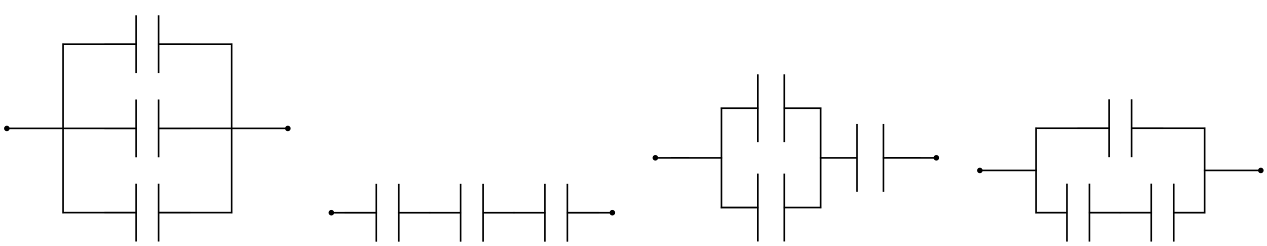
C. $5\,\mu$F és $10\,\mu$F párhuzamosan, az $1\,\mu$F utána sorosan,

D. $5\,\mu$F és $10\,\mu$F sorosan, az $1\,\mu$F velük párhuzamosan.

Megoldás:

Adatok: $C_1 = 1\,\mu$F; $C_2 = 5\,\mu$F; $C_3 = 10\,\mu$F; $U_0 = 500\,$V.

Legyen a töltés mértékegysége μC, így minden formulában a feszültség értéke voltban adódik.



1. 2. 3. 4.

Érdemes kiszámítani az összes kombinációhoz tartozó feszültséget, és utána válaszolni a kérdésekre.

1. Lehet mindhárom kondenzátor párhuzamosan kötve. Ekkor nyilvánvaló, hogy a keresett feszültség 500 V.

2. Lehet mindhárom kondenzátor sorosan kapcsolva. Ekkor a töltés azonos mindegyiken, a feszültségekre pedig fennáll, hogy

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{1} \le 500\,\text{V}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{5} \le 500\,\text{V}, \quad U_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{Q}{10} \le 500\,\text{V}\,.$$

Látható, hogy a legnagyobb feszültség az U_1 lehet, tehát $U_1 = 500\,\mathrm{V}$, és $Q = 500\,\mu\mathrm{C}$.

Így $U_2 = 100\,\mathrm{V}$, $U_3 = 50\,\mathrm{V}$.

Soros esetben a legnagyobb rákapcsolható feszültség $500\,\mathrm{V} + 100\,\mathrm{V} + 50\,\mathrm{V} = \underline{\underline{650\,\mathrm{V}}}$.

3. Két kondenzátor párhuzamosan kötve, és ezzel sorosan a harmadik. Ennek a kapcsolásnak három alesete van.

3.1 $C_{12} = (1+5)\,\mu\mathrm{F} = 6\,\mu\mathrm{F}$. Ekkor

$$U_{12} = \frac{Q}{C_{12}} = \frac{Q}{6} \leq 500\,\mathrm{V}, \quad U_3\frac{Q}{C_3} = \frac{Q}{10} \leq 500\,\mathrm{V}\,.$$

Látható, hogy a legnagyobb feszültség U_{12} lehet, tehát $U_{12} = 500\,\mathrm{V}$, és $Q = 6 \cdot 500\,\mu\mathrm{C} = 3000\,\mu\mathrm{C}$. Így $U_3 = \frac{3000}{10}\,\mathrm{V} = 300\,\mathrm{V}$.

A legnagyobb rákapcsolható feszültség tehát ebben az esetben $500\,\mathrm{V} + 300\,\mathrm{V} = \underline{\underline{800\,\mathrm{V}}}$.

3.2 $C_{13} = (1+10)\,\mu\mathrm{F} = 11\,\mu\mathrm{F}$. Ekkor

$$U_{13} = \frac{Q}{C_{13}} = \frac{Q}{11} \leq 500\,\mathrm{V}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{5} \leq 500\,\mathrm{V}\,.$$

Látható, hogy a legnagyobb feszültség az U_2 lehet, tehát $U_2 = 500\,\mathrm{V}$, és $Q = 5 \cdot 500\,\mu\mathrm{C} = 2500\,\mu\mathrm{C}$. Így $U_{13} = \frac{2500}{11}\,\mathrm{V} = 227,3\,\mathrm{V}$.

A legnagyobb rákapcsolható feszültség tehát $500\,\mathrm{V} + 227,3\,\mathrm{V} = \underline{\underline{727,3\,\mathrm{V}}}$.

3.3 $C_{23} = (5+10)\,\mu\mathrm{F} = 15\,\mu\mathrm{F}$. Ekkor

$$U_{23} = \frac{Q}{C_{23}} = \frac{Q}{15} \leq 500\,\mathrm{V}, \quad U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{1} \leq 500\,\mathrm{V}\,.$$

Látható, hogy a legnagyobb feszültség az U_1 lehet, tehát $U_1 = 500\,\mathrm{V}$, és $Q = 500\,\mu\mathrm{C}$. Így $U_{23} = \frac{500}{15}\,\mathrm{V} = 33,3\,\mathrm{V}$.

A legnagyobb rákapcsolható feszültség tehát ebben az esetben $500\,\mathrm{V} + 33,3\,\mathrm{V} = \underline{\underline{533,3\,\mathrm{V}}}$.

4. Két kondenzátor sorosan van kötve, és velük párhuzamosan a harmadik. Ilyenkor a legnagyobb feszültséget az egyedülálló párhuzamosan kötött kondenzátor szabja meg. A sorosan kötött két kondenzátoron az $500\,\mathrm{V}$ oszlik el, de azt feladat nem kérdezi. Így itt bármelyik esetben a maximális feszültség $\underline{\underline{500\,\mathrm{V}}}$.

A számítások alapján a helyes válaszok :

Ad 1.) Helyes válasz: A. $800\,\mathrm{V}$, ez a 3.1 eset.

Ad 2.) Helyes válasz: C. Két párhuzamos, a harmadik velük sorosan kötött. A lehetséges 3 eset közül a 3.1 esetben a legnagyobb rákapcsolható feszültség: $800\,\mathrm{V}$.

Ad 3.) Helyes válasz: A. $1\,\mu\mathrm{F}$ és $10\,\mu\mathrm{F}$ párhuzamosan, az $5\,\mu\mathrm{F}$ utána sorosan, ez a 3.2 eset, amikor a feszültség $727\,\mathrm{V}$.

Ad 4.) Helyes válasz: B. és D. Mert itt $500\,\mathrm{V}$ a rákapcsolható feszültség, de nem számít melyik 2 van sorba kötve.

12. osztály

1. Feladat:

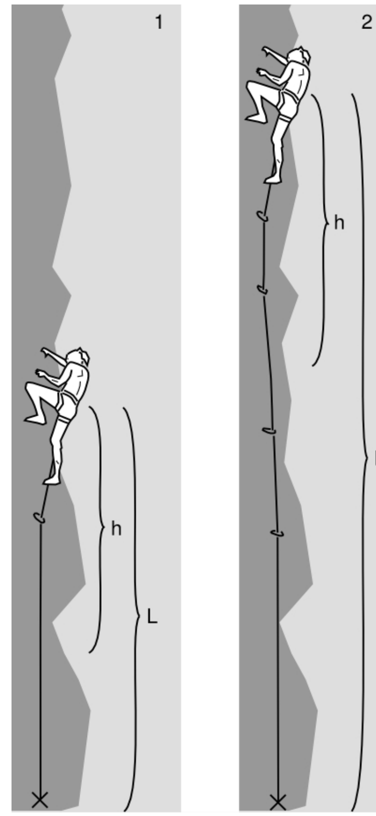
Sziklamászás során ún. dinamikus kötelet szokás használni. Az ilyen kötél igen széles tartományban rugalmasan viselkedik, így a nyújtás hatására benne ébredő erő leírható az

$$F = -\left(\frac{EA_0}{L_0}\right)\Delta x = -D\Delta x$$

formulával, ahol A_0 a kötél nyújtatlan keresztmetszete, L_0 a kötél nyújtatlan hossza, Δx a megnyúlás, E pedig a nyúlási tulajdonságokat jellemző, anyagi minőségtől függő állandó (Young modulus).

Ha az elölmászó leesik, akkor az esés jellemzésére az ún. **eséstényezőt** szokás bevezetni.

$$\text{Eséstényező} = \frac{\text{esés hossza}}{\text{megfeszülő kötélhossz}}; \text{ azaz} \qquad f = \frac{h}{L}.$$



(Az esés hossza az utolsó biztosítási pont fölött lévő kötélhossz kétszerese, ahogy az az ábrán is látszik.)

A legegyszerűbb modellszámítások esetén a kötelet az esés során végig rugalmasan viselkedőnek feltételezzük, jóllehet az esés után a mászó nem végez hosszasan rezgő mozgást a kötélen.

A sziklamászó köteleket sztenderd esési szituációban tesztelik. A tesztelés során egy 80 kg-os próbatestet ejtenek le 1,77-es eséstényezővel és mérik a testre ható maximális kötélerőt. A mászó olyan kötelet, használt amelynél ez az érték $8,30\,\text{kN}$.

a) Vezessük le, hogy adott minőségű kötél és adott eséstényező esetén az m tömegű mászóra maximálisan mekkora kötélerő hat az esés során! **(10 p)**

b) Egy 70 kg-os elölmászó kiesik a mászóútból úgy, hogy már 22 méternyit mászott a sziklafalon és épp 4 méterrel van a legutolsó biztosítási pont fölött. Maximálisan mekkora kötélerő hat rá? **(10 p)**

Megoldás:

Adatok: $m_0 = 80\,\text{kg}$; $f_0 = 1,77$; $K_0 = 8,30\,\text{kN}$; $m = 70\,\text{kg}$; $\frac{h}{2} = 4\,\text{m}$; $L = 22\,\text{m}$.

Ad a) A kötélben ébredő maximális erő:

$$K_{\text{max}} = F_{r0} - m \cdot g = D \cdot \Delta x_0 - m \cdot g. \qquad \textbf{(2 p)}$$

A kötél maximális megnyúlásának kiszámításához az energiamegmaradást használjuk fel:

$$m \cdot g \cdot (h + \Delta x_0) = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \Delta x_0^2. \qquad \textbf{(3 p)}$$

Ebből Δx_0-ra a következő másodfokú egyenlet adódik

$$0 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \Delta x_0^2 - m \cdot g \cdot \Delta x_0 - m \cdot g \cdot h$$

Amelynek fizikailag értelmes (pozitív) megoldása:

$$\Delta x_0 = \frac{m \cdot g + \sqrt{m^2 \cdot g^2 + 2 \cdot D \cdot m \cdot g \cdot h}}{D} = \frac{m \cdot g}{D} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{D}{m \cdot g} \cdot h}\right). \qquad \textbf{(2 p)}$$

Behelyettesítve Δx_0-at a kötélerő kifejezésébe

$$K_{\text{max}} = m \cdot g \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{D}{m \cdot g} \cdot h}\right) - m \cdot g$$

$$K_{\text{max}} = m \cdot g \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{D}{m \cdot g} \cdot h} = m \cdot g \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{E \cdot A}{m \cdot g} \cdot \frac{h}{L}}$$

Tehát a maximális kötélerő az esési tényező függvényében:

$$\boxed{K_{\text{max}}(f) = m \cdot g \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{(E \cdot A_0)}{m \cdot g} \cdot f}} \qquad \textbf{(3 p)}$$

Ahol az $(E \cdot A_0)$ a kötélre jellemző állandó érték. Itt feltételeztük, hogy a kötél keresztmetszete lényegesen nem változik meg. **(összesen = 10 p)**

Ad b) A kötélre standard mérési szituációban meghatározott adatok alapján: $m = 80\,\text{kg}$; $f_0 = 1,77$ $K_0 = 8300\,\text{N}$ Használva az előző pontban általános esetre levezetett formulát az $(E \cdot A_0)$ a kötélre jellemző állandó megadható a standard mérési szituáció adatai segítségével:

$$K_0 = m_0 \cdot g \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{(E \cdot A_0)}{m_0 \cdot g} \cdot f_0} \quad \Rightarrow \quad (E \cdot A_0) = \left[\left(\frac{K_0}{m_0 \cdot g}\right)^2 - 1\right] \cdot \frac{m_0 \cdot g}{2 \cdot f_0}$$

Azaz

$$(E \cdot A_0) = \left[\left(\frac{8300}{800}\right)^2 - 1\right] \cdot \frac{800}{2 \cdot 1,77} = 24099,6\,\text{N} \qquad \textbf{(5 p)}$$

Az $m = 70\,\text{kg}$-os mászó 4 méterre van a legutolsó biztosítási ponttól, azaz az esés hossza $h = 2 \cdot 4\,\text{m}$, miközben a megfeszülő kötélhossz $L = 22\,\text{m}$, tehát az eséstényezője:

$$f = \frac{8}{22}.$$

Ezt behelyettesítve és használva az előbb kiszámolt állandót:

$$K = 700 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{24099,6}{700} \cdot \frac{8}{22}} = \underline{\underline{3572\,\text{N}}} = \underline{\underline{3,57\,\text{kN}}}. \qquad \textbf{(5 p)}$$

(összesen = 10 p)

Másik megoldás:

Ad a) Energia megmaradás helyett a feladat a mozgásegyenlet segítségével is megoldható.

Amikor a mászó leesik, mielőtt a kötelet megrántaná (azaz a kötél még nyújtatlan), a sebessége $v_0 = \sqrt{2gh}$, mivel h magasságból szabadon esik. **(2 p)**

A mozgásegyenlete

$$ma = mg - Dx. \qquad \textbf{(2 p)}$$

Vezessük be az $X = x - x_0$ új változót, ahol $x_0 = mg/D$. A gyorsulás ettől nem változik.

Így $ma = -DX$, amelynek megoldása rezgőmozgás $\left(\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}\right)$:

$$X = A\sin(\omega t + \varphi_0), \quad \text{azaz} \quad x = A\sin(\omega t + \varphi_0) + x_0.$$

A test sebessége $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$.

A mozgás kezdetén ($t = 0$), $v = v_0$ és $x = 0$. A kezdeti értékeket behelyettesítve meghatározhatjuk az A amplitúdót és a φ_0 kezdőfázist:

$$0 = A\sin\varphi_0 + x_0, \text{ és } v_0 = A\omega\cos\varphi_0. \quad \Rightarrow \quad -x_0 = A\sin\varphi_0, \text{ és } \frac{v_0}{\omega} = A\cos\varphi_0.$$

Négyzetre emelve és összeadva a két egyenletet:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \qquad \textbf{(4 p)}$$

A maximális kötélerő értéke

$$K_{\text{max}} = D{\cdot}A = D{\cdot}\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{D^2\left(\frac{m^2g^2}{D^2} + \frac{2gh}{D}\cdot m\right)} = mg\sqrt{1 + \frac{2Dh}{mg}} = mg\sqrt{1 + 2\cdot\frac{EA}{mg}\cdot\frac{h}{L}}.$$

Innen a megoldás azonos az előzővel. **(2 p)**

2. Feladat:

Mennyezethez rögzített $1\,\mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű hőszigetelt hengerben levegő van. A levegő térfogata kezdetben $3\,\text{liter}$, hőmérséklete $300\,\mathrm{K}$. A gázt elzáró könnyen mozgó dugattyú szintén hőszigetelt, tömege $10\,\mathrm{kg}$. A dugattyúról zsinóron egy másik $10\,\mathrm{kg}$ tömegű test függ, a talaj fölött $10\,\mathrm{cm}$ magasan. A levegőt lassan melegítjük, míg térfogata $4,4\,\text{liter}$ lesz.

a) Mekkora a végállapot hőmérséklete? **(8 p)**

b) Mennyi hőt kellett a gázzal közölni? **(12 p)**

Megoldás:

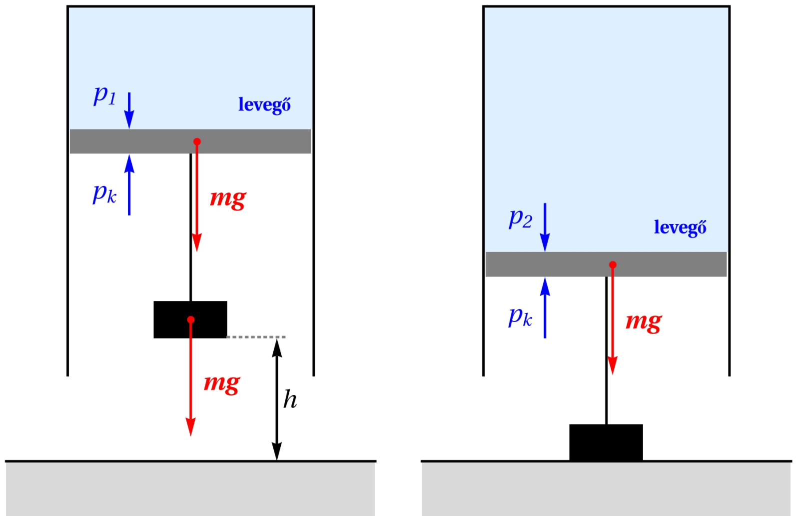
Adatok: $A = 1\,\mathrm{dm}^2 = 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$; $V_1 = 3\,\text{liter} = 3\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$; $T_1 = 300\,\mathrm{K}$; $m_{\text{dugattyu}} = m_{\text{test}} = m = 10\,\mathrm{kg}$; $h = 10\,\mathrm{cm}$; $V_2 = 4,4\,\text{liter} = 4,4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$

Ad a) Az első kérdés amit tisztáznunk kell, hogy eléri e a zsinórra függesztett test a talajt, miközben a melegítés hatására a gáz tágul?

Ha a dugattyú h-val lejjebb kerül az $h \cdot A = 1\,\mathrm{dm} \cdot 1\,\mathrm{dm}^2 = 1\,\mathrm{liter}$ térfogatváltozásnak felel meg.

A teljes térfogatváltozás viszont $\Delta V = V_2 - V_1 = 1{,}4\,\mathrm{liter}$.

Tehát a folyamat során a zsinórra függesztett test $1\,\mathrm{liter}$ tágulást követően eléri a talajt. Ekkor a belső nyomás megnő, hisz innentől kezdve csak a saját súlya húzza lefelé a dugattyút. A maradék $0{,}4\,\mathrm{liter}$ tágulás már e megváltozott nyomás mellett történik. **(4 p)**



Számoljuk ki a kezdetben illetve a végállapotban uralkodó belső nyomást.

Kezdetben:

$$p_1 + \frac{2mg}{A} = p_k \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_k - \frac{2mg}{A} = 10^5 - \frac{2 \cdot 10 \cdot 10}{10^{-2}} = 8 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$$

Miután a test talajt ér: **(2 p)**

$$p_2 + \frac{mg}{A} = p_k \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_k - \frac{mg}{A} = 10^5 - \frac{10 \cdot 10}{10^{-2}} = 9 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$$

Az egyesített gáztörvény alapján

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2},$$

ahol már csak a keresett T_2 hőmérséklet az ismeretlen.

$$T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot V_1} = \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 300}{8 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{495\,\mathrm{K}}}. \qquad \textbf{(2 p)}$$

(összesen = 8 p)

Ad b) A szükséges hő a hőtan első fő tétele alapján számolható:

$$\Delta E_b = Q - W_g,$$

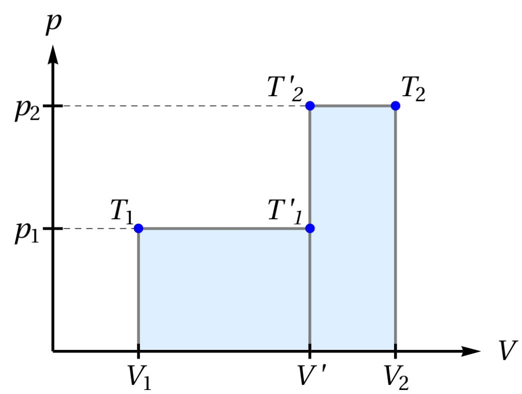
ahol W_g a gáz által végzett munka. **(2 p)**

A belsőenergia változást könnyen megkapjuk, hisz már tudjuk a hőmérséklet-változást és levegőről lévén szó a szabadsági fokok száma is ismert ($f = 5$ hisz nagyrészt 2 atomos molekulákból áll). Továbbá a gázok állapotegyenletéből:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = n \cdot R$$

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = \frac{f}{2} \cdot \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \cdot \Delta T = \frac{5}{2} \cdot \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{300} \cdot 195 = 390\,\mathrm{J}\,.$$ **(4 p)**

A gáz állandó nyomáson végez munkát mindkét szakaszon. 1 liter-nyit tágul $8 \cdot 10^4$ Pa nyomáson, majd a maradék $0,4$ liter-nyi változást már a megnövekedett $9 \cdot 10^4$ Pa-os belső nyomás mellett éri el.



$$W_g = p_1 \cdot \Delta V_1 + p_2 \cdot \Delta V_2.$$ **(4 p)**

Behelyettesítve:

$$W_g = 8 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} = 80 + 36 = 116\,\mathrm{J}$$

$$Q = \Delta E_b + W_g = 390 + 116 = \underline{\underline{506\,\mathrm{J}}}.$$ **(2 p)**

(összesen = 12 p)

Másik megoldás:

Ad b) Ahogy a fönti ábrán is látszik a folyamat valójában 3 részből tevődik össze:

1. hőfelvétel állandó nyomáson: $(p_1, V_1, T_1) \rightarrow (p_1, V', T_1')$
2. hőfelvétel állandó térfogaton: $(p_1, V', T_1') \rightarrow (p_2, V', T_2')$ **(2 p)**
3. ismét hőfelvétel állandó nyomáson: $(p_2, V', T_2') \rightarrow (p_2, V_2, T_2)$

Állandó nyomáson felvett hő az első fő tétel alapján:

$$Q = \Delta E_b + p\Delta V = \frac{f}{2} nR\Delta T + nR\Delta T = \frac{f+2}{2} nR\Delta T (= c_p nR\Delta T).$$ **(2 p)**

Az állandó térfogaton felvett hő az első fő tétel alapján:

$$Q = \Delta E_b = \frac{f}{2} nR\Delta T (= c_V nR\Delta T)$$

Az egyesített gáztörvény alapján az ábrán is jelölt közbülső hőmérsékletek kiszámíthatóak:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V'}{T_1'} \quad \Rightarrow \quad T_1' = \frac{V' \cdot T_1}{V_1} = \frac{4 \cdot 300}{3} = 400\,\mathrm{K}$$ **(2 p)**

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V'}{T_2'} \quad \Rightarrow \quad T_2' = \frac{V' \cdot T_2}{V_2} = \frac{4 \cdot 495}{4,4} = 450\,\mathrm{K}$$

Az állapot egyenlet alapján:

$$n \cdot R = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{300} = 0,8\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Így a három hő:

$$Q_1 = \frac{5+2}{2} n \cdot R \cdot (T_1' - T_1) = \frac{7}{2} \cdot 0,8 \cdot (400 - 300) = 280\,\mathrm{J}$$

$$Q_2 = \frac{5}{2} n \cdot R \cdot (T_2' - T_1') = \frac{5}{2} \cdot 0,8 \cdot (450 - 400) = 100\,\mathrm{J}$$

$$Q_3 = \frac{5+2}{2} n \cdot R \cdot (T_2 - T_2') = \frac{7}{2} \cdot 0,8 \cdot (495 - 450) = 126\,\mathrm{J}$$

Az összes közölt hő pedig:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 280 + 100 + 126 = \underline{\underline{506\,\mathrm{J}}}. \qquad \textbf{(6 p)}$$

3. Feladat:

A Föld egyik legrégebbi kőzetében argon-nyomokat találtak. A kőzetet vákuumban elporítva azt találták, hogy az argonatomok száma a káliumatomok számának $1/10000$ része. A ^{40}K atomok radioaktívak, felezési idejük 1,18 milliárd év. Bomlástermékeik 11 %-a ^{40}Ar, amely stabil izotóp. Jelenleg az összes káliumnak 0,0118 százaléka a ^{40}K izotóp. Mennyi idős lehet a kőzet?

Megoldás:

Adatok: $T_{1/2} = 1,18$ milliárd év.

A ^{40}**K izotópra** alkalmazzuk a radioaktív bomlástörvényt, amely alapján az atomok száma a kiinduláshoz képest t idő múlva: **(2 p)**

$$N(t) = N(0) \cdot 2^{-t/T_{1/2}}.$$

Mi azonban a jelenlegi mennyiségekről rendelkezünk információval, így a jelenlegi mennyiséghez képest fejezzük ki, hogy mennyi lehetett kezdetben:

$$N(0) = N(t) \cdot 2^{t/T_{1/2}}.$$

Ezek alapján az elbomlott ^{40}K atomok száma $N_{\text{elbomlott}} = N(0) - N(t)$ kifejezhető a jelenlegi $N(t)$ számukkal:

$$N_{\text{elbomlott}} = N(t) \cdot (2^{t/T_{1/2}} - 1) \qquad \textbf{(4 p)} \tag{1}$$

A kiindulási helyzethez képest eltelt időt, amely jó becslést ad a kőzet korára, a fönti formulából szeretnénk meghatározni.

Az argon atomok számához viszonyítva könnyen megadhatjuk az elbomlott kálium izotópok számát. Hiszen a ^{40}K bomlástermékeinek 11 %-át teszi ki a ^{40}Ar.

$$N_{\text{elbomlott}} \cdot 0,11 = N_{\text{Ar}} \quad \Rightarrow \quad N_{\text{elbomlott}} = \frac{1}{0,11} N_{\text{Ar}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

Szintén az argon atomok számához viszonyítva kellene megadni a ^{40}K izotópok jelenlegi számát. A feladat szövege alapján tudjuk, hogy

$$N_{\text{Ar}} = \frac{1}{10000} N_K, \quad \text{és} \quad N(t) = \frac{0,0118}{100} N_K \quad \Rightarrow \quad N(t) = \frac{0,0118}{100} \cdot 10000 \cdot N_{\text{Ar}} = 1,18 \cdot N_{\text{Ar}} \qquad \textbf{(4 p)}$$

Behelyettesítve most már a bomlástörvényből kapott (1) formulába:

$$\frac{1}{0,11}N_{\mathrm{Ar}} = 1,18 \cdot N_{\mathrm{Ar}} \cdot (2^{t/T_{1/2}} - 1). \qquad \textbf{(2 p)}$$

Ahonnan

$$\frac{1}{0,11 \cdot 1,18} = (2^{t/T_{1/2}} - 1) \quad \Rightarrow \quad t = T_{1/2} \cdot \log_2\left(\frac{1}{0,11 \cdot 1,18} + 1\right).$$

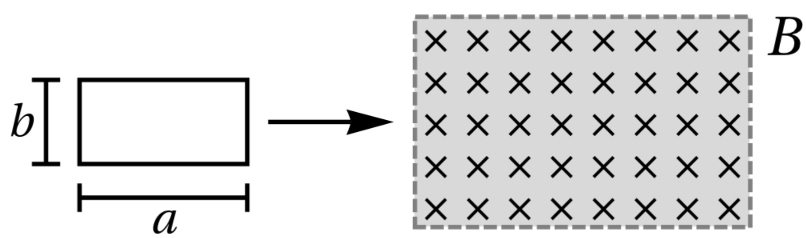
A felezési idő értékét beírva pedig a kőzet kora:

$$t = 1,18 \text{ milliárd év} \cdot \log_2 8,704 = 1,18 \cdot 3,122 \text{ milliárd év} = \underline{\underline{3,68 \text{ milliárd év}}}. \qquad \textbf{(4 p)}$$

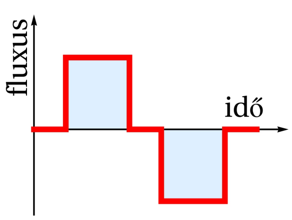
Ez hihető, hisz Földünk életkora kb. $4,5$ milliárd év. **(összesen = 20 p)**

Teszt: Indoklás nélküli jó válasz 1 pont.

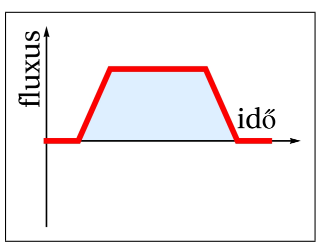
Az alábbi ábrán a B nagyságú homogén mágneses mező az ábra síkjában befelé mutat. A szaggatott vonalakon kívül a mező eltűnik. Az ábrán berajzolt helyzetből indulva a téglalap alakú vezető keretet jobbfelé állandó sebességgel keresztül húzzuk a mágneses mezőn.



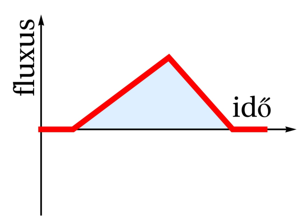
1. Melyik grafikon mutatja helyesen a hurkon áthaladó mágneses fluxus időbeli változását? **(4 p)**



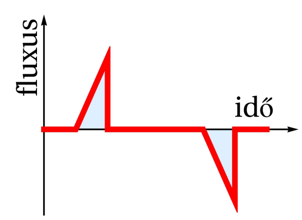
A.



B.



C.



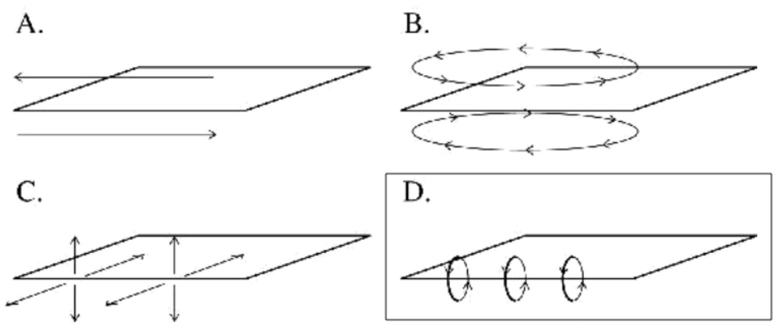
D.

2. A téglalap alakú vezetőkeretben akkor folyik áram, amikor az **(4 p)**

   I. belép a mágneses mezőbe.
   II. teljes felületével a mágneses mezőben van.
   III. elhagyja a mágneses mezőt.

   A. Csak I. igaz.
   B. I. és II. is igaz.
   C. I. és III. is igaz.
   D. Mindhárom állítás igaz.

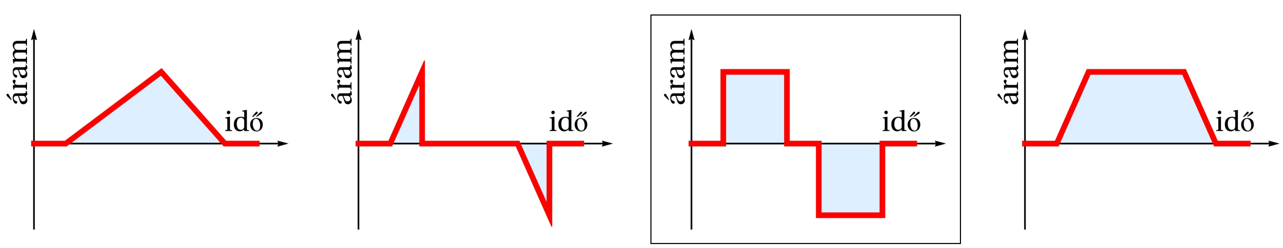
3. Az alábbiak közül melyik ábra mutatja helyesen az áramjárta téglalap *egyik* oldalánál keletkező mágneses indukció vonalakat? **(4 p)**



4. Az alábbiak közül melyik NEM kelthet elektromos áramot a vezető hurokban? **(4 p)**

   A. Egy olyan áramjárta vezetékdarab közelébe helyezzük a vezető hurkot, amelyben az áramerősség csökken.
   B. A vezető hurkot egy mágnesrúd felé közelítjük.
   C. Mágnesrudat közelítünk a vezető hurok felé.
   D. A hurok belsejében mágnesrúd nyugszik.

5. Melyik grafikon mutatja helyesen a vezető hurokban folyó áram erősségét az idő függvényében? **(4 p)**



A. B. C. D.

Megoldás:

Ad 1.) Helyes válasz: B. Miután a téglalap alakú hurok eléri a mezőt, a mezőbe eső felülete egyenletesen növekszik, hiszen egyenletes sebességgel mozgatjuk jobbra. Azaz a hurkon áthaladó mágneses fluxus is egyenletesen növekszik. Majd elérkezünk arra a pontra, amikor már a hurok 100%-ban a mágneses mezőben halad, innentől a fluxus nem változik, hiszen a teljes téglalap a mezőbe esik és a mező homogén. Tehát a fluxus konstans egészen addig, amíg el nem érjük a mágneses mező „túlsó szélét". Ekkor a hurok mezőbe eső területe egyenletesen csökkenni kezd, míg teljesen el nem hagyja a mágneses mezőt. Azaz a fluxus egyenletesen lecsökken nullára, (de nem lesz negatív!).

Ad 2.) Helyes válasz: C. Csak akkor folyik áram a vezető hurokban, ha a hurkon áthaladó **mágneses fluxus változik**. És az 1. kérdésnél már láttuk, hogy a fluxus akkor változik, amikor a keret „be", ill. „kilép" a mezőből, és konstans amíg teljes felületével a mágneses mezőben tartózkodik.

Ad 3.) Helyes válasz: D. Egy áramjárta egyenes vezetődarabot kör alakban veszik körül a mágneses indukció vonalak.

Ad 4.) Helyes válasz: D. Ahhoz, hogy a hurokban áram indukálódjon változó mágneses fluxusra van szükség. Változás pedig akkor lesz, ha vagy a mágneses indukció nagysága, vagy pedig a hurok mágneses mezőbe eső területe változik.

Az A esetben a csökkenő áramerősség az áramjárta vezetékdarab körül csökkenő erősségű mágneses mezőt kelt ami fluxus változást okoz a vezető hurokban, tehát áramot indukál benne. A B. és C. esetben a hurok közelebb kerül a mágneshez, így a mágneses indukció változik, azaz ismét van fluxusváltozás, ami áramot indukál a hurokban. Ezzel ellentétben, a D. esetben a mágneses fluxus konstans, így nem indukálódik áram.

Ad 5.) Helyes válasz: C. A 2. kérdésre adott válasznál már megállapítottuk, hogy csak akkor folyik áram a vezető hurokban, ha a hurkon áthaladó **mágneses fluxus változik**, azaz a „be", ill. „kilépés" során. Így csak a B. és C. grafikon jön szóba.

Mivel állandó sebességgel mozog a keret, a fluxus egyenletesen nő/csökken a be és kilépés során. Így az indukálódott feszültség és a hatására a keretben meginduló áram is állandó. Azaz a B. ábra helyes.